МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В.Н. КАРАЗИНА

МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Харьков 2005

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В.Н. КАРАЗИНА

МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Харьков 2005

УДК 517.95
Метричні та нормовані простори. Навчально-методичний посібник з математичного аналізу / І.Є. Луценко, В.С. Рижий, С.С. Бойко. – Харків: ХНУ, 2005. – 78с.

Метою даного навчально-методичного посібника є активізація самостійної роботи студентів. Посібник розбитий на частини та параграфи, які починаються з формулювань необхідних понять і тверджень, що використовуються при вивченні цієї теми в рамках курсу математичного аналізу, а також при виконанні вправ. Більш складні або менш обов'язкові вправи відмічені зірочками. Частина задач може бути використана на заняттях в аудиторії, а також у якості курсових робіт. Наведені без доведення твердження супроводжуються докладними посиланнями на літературу, а до вправ даються вказівки для розв'язування. Для кращого засвоєння теми пропонуються 32 варіанти індивідуальних залікових завдань.

УДК 517.95
Метрические и нормированные пространства. Учебно-методическое пособие по математическому анализу / И.Е. Луценко, В.С. Рыжий, С.С. Бойко. – Харьков: ХНУ, 2005. – 78с.

Целью настоящего учебно-методического пособия является активизация самостоятельной работы студентов. Пособие разбито на части и параграфы, которые начинаются с формулировок необходимых понятий и утверждений, используемых при изучении этой темы в рамках курса математического анализа, а также при выполнении предлагаемых в каждом параграфе упражнений. Более трудные или менее обязательные упражнения отмечены звёздочками. Часть задач может быть использована на занятиях в аудитории, а также в качестве курсовых работ. Приводимые без доказательства утверждения снабжены подробными ссылками на литературу, а к упражнениям даны указания к решению. Для лучшего усвоения темы предлагается 32 варианта индивидуальных зачётных заданий.

Печатается в авторской редакции.

Рецензент: С.Л. Гефтер, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа ХНУ.

Рекомендовано кафедрой математического анализа. Протокол № 6 от 17.03.2005 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1.1. Метрика.

Как возникает понятие метрического пространства? Напомним, что определения предела числовой последовательности и числовой функции числового аргумента основаны на понятии расстояния между точками числовой прямой. Естественно попытаться ввести расстояние между элементами произвольного множества, чтобы распространить основную операцию математического анализа – предельный переход – на отображения множеств различной природы, а также, по возможности, перенести на этот более общий случай основные свойства числовых множеств и числовых функций, связанные с понятиями расстояния и предела. Эти соображения и очевидные свойства расстояния на числовой прямой приводят к общепринятому теперь определению метрического пространства, впервые сформулированному в 1906 году французским математиком М. Фреше (M. Fréchet).

Определение. Пусть X – произвольное непустое множество. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой (или расстоянием) на (или в) X, если выполнены условия (аксиомы):

(1) $\forall x \in X\ \forall y \in X:\ \rho(x,y) \ge 0$, причём $(\rho(x,y)=0) \Leftrightarrow (x=y)$ (аксиома положительной определённости метрики);

(2) $\forall x \in X\ \forall y \in X:\ \rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксиома симметрии);

(3) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X:\ \rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (аксиома треугольника).

Пара (X,ρ) называется метрическим пространством (для удобства будем пользоваться также аббревиатурой МП). Если понятно, о какой метрике идёт речь, то говорят о МП X вместо (X,ρ).

Если в определении МП аксиому (1) заменить условием:

(1*a*) $\forall x \in X\ \forall y \in X:\ \rho(x,y) \ge 0$, причём $(x=y) \Rightarrow (\rho(x,y)=0)$ (аксиома неотрицательной определённости метрики),

то в этом случае ρ называется псевдометрикой, или полуметрикой, а пара (X,ρ) – псевдометрическим, или полуметрическим, пространством. Если псевдометрика ρ не является метрикой, то в этом случае ρ называют также вырожденной метрикой, а термин "метрика" заменяют на термин "невырожденная метрика".

Замечание. Обращаем внимание на то, что две различные метрики (псевдометрики) $\rho_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ (на одном и том же множестве X) порождают два разных метрических (псевдометрических) пространства (X,ρ_1) и (X,ρ_2).

Пусть (X,ρ) – псевдометрическое пространство. Назовём элемент $x \in X$ эквивалентным элементу $y \in X$, если $\rho(x,y)=0$, вводя тем самым отношение эквивалентности в X. (Проверьте это!) Пусть $\hat{x}$ – обозначение класса эквивалентности, который порождается элементом $x \in X$, и пусть $\hat{X}$ – множество классов эквивалентности, отвечающих рассматриваемому отношению эквивалентности. Тогда на $\hat{X}$ можно ввести метрику $\hat{\rho}$ посредством формулы

$$\hat{\rho}(\hat{x},\hat{y}) = \rho(x,y), \quad x \in \hat{x}, \quad y \in \hat{y}. \qquad (1.1)$$

Полученное с помощью описанной процедуры из псевдометрического пространства (X,ρ) метрическое пространство $(\hat{X},\hat{\rho})$ называют фактор-пространством, отвечающим данной псевдометрике ρ, и говорят, что переход от псевдометрики ρ к метрике $\hat{\rho}$ осуществляется путём отождествления тех элементов x и y в X, для которых $\rho(x,y)=0$.

Упражнения. 1.1.1. Проверьте корректность определения функции $\hat{\rho} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$, задаваемой формулой (1.1), и докажите, что она является метрикой в $\hat{X}$.

1.1.2. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите неравенства:

(*а*) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X:\ \rho(x,y) \ge |\rho(x,z)-\rho(z,y)|$;

(*б*) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ \forall w \in X:\ |\rho(x,y)-\rho(z,w)| \le \rho(x,z)+\rho(y,w)$ (неравенство четырёхугольника);

(*в*) $\forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X:\ \rho(x_1,x_n) \le \rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)+\cdots+\rho(x_{n-1},x_n)$.

1.1.3. Покажите, что система аксиом (1) – (3) равносильна следующей системе аксиом:

(1′) $\forall (x,y) \in X \times X:\ \ (\rho(x,y)=0) \Leftrightarrow (x=y)$;

(2′) $\forall (x,y,z) \in X \times X \times X:\ \ \rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(y,z)$.

(В этой новой системе аксиом порядок записи элементов существен, так как здесь изначально не предполагается симметрия.)

1.1.4. Проверьте, что для любого непустого множества X является метрикой функция

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y, \\ 1, & x \ne y, \end{cases} \quad \text{(дискретная метрика на } X\text{)}.$$

Замечание. Как видно из упр.1.1.4, любое непустое множество можно превратить в МП, задав на нём некоторую метрику.

1.1.5. (Классические метрики в $\mathbb{R}^n$.) Пусть $\mathbb{R}^n = \{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}: x_i \in \mathbb{R}\}$.

Проверьте, что (X,ρ) – МП, если:

(*а*) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|$ (естественная метрика на прямой);

(*б*) $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ (евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, аргументацию выбора индексов у ρ в пунктах (*б*), (*в*) и (*г*) см. в пункте (*д*));

(*в*) $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_\infty(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ (чебышёвская метрика в $\mathbb{R}^n$);

(*г*) $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ("уличная" метрика в $\mathbb{R}^n$, при $n=2$ такая метрика естественно возникает в городах с прямоугольной планировкой, где расстояние между объектами измеряется евклидовой длиной кратчайшего пути, соединяющего их при движении по улицам);

(*д*)* $X=\mathbb{R}^n$ $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $1 \le p < \infty$

(*p*-метрика Минковского в $\mathbb{R}^n$). В частности, при $p=1$ получается "уличная" метрика, а при $p=2$ – евклидова. Докажите, что $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \ \forall p \in [1,+\infty)\ \forall q \in [1,+\infty)$:

$$(p<q) \Rightarrow (\rho_\infty(x,y) \le \rho_q(x,y) \le \rho_p(x,y) \le \rho_1(x,y) \le n\rho_\infty(x,y)). \qquad (1.2)$$

Покажите, что $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\rho_\infty(x,y)$;

(*е*)* $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_p(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $0<p\le 1$.

Докажите, что $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \ \forall p \in (0,1]\ \forall q \in (0,1]$:

$$(p<q)\Rightarrow\left(\rho_1^{pq}(x,y)\le\rho_q^{p}(x,y)\le\rho_p^{q}(x,y)\le n^{q}\rho_1^{pq}(x,y)\right).$$

1.1.6. (Классические метрики в семействе непрерывных функций $\mathbf{C}[a,b]$.) Проверьте, что (X,ρ) – МП, если:

(а) $X=\mathbf{C}[a,b]$, $\rho_\infty(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, (чебышёвская метрика в $\mathbf{C}[a,b]$, аргументацию выбора индексов у ρ в пунктах (а), (б) и (в) см. в пункте (г));

(б) $X=\mathbf{C}[a,b]$, $\rho_1(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ (интегральная 1-метрика Минковского в $\mathbf{C}[a,b]$);

(в) $X=\mathbf{C}[a,b]$, $\rho_2(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt}$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ (интегральная 2-метрика Минковского в $\mathbf{C}[a,b]$);

(г)* $X=\mathbf{C}[a,b]$, $\rho_p(x,y)=\left(\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $1\le p<\infty$ (интегральная p-метрика Минковского в $\mathbf{C}[a,b]$). Докажите, что

$$\forall x\in\mathbf{C}[a,b]\ \forall y\in\mathbf{C}[a,b]\ \forall p\in[1,+\infty)\ \forall q\in[1,+\infty):$$

$$(p<q)\Rightarrow\left(\rho_p(x,y)\le(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\rho_q(x,y)\right),\tag{1.3}$$

$$\rho_p(x,y)\le(b-a)^{\frac{1}{p}}\rho_\infty(x,y).\tag{1.4}$$

Покажите, что $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\rho_\infty(x,y)$.

(д)* $X=\mathbf{C}[a,b]$, $\rho_p(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^p\,dt$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $0<p\le1$.

Докажите, что $\forall x\in\mathbf{C}[a,b]\ \forall y\in\mathbf{C}[a,b]\ \forall p\in(0,1]\ \forall q\in(0,1]$:

$$(p<q)\Rightarrow\left(\rho_p^{q}(x,y)\le(b-a)^{q-p}\rho_q^{p}(x,y)\right).$$

1.1.7. (Классические метрики в семействах числовых последовательностей.) Проверьте, что (X,ρ) – МП, если:

(а) $X=l_\infty$, где $l_\infty=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\,|\,(\forall n\in\mathbb{N}: x_n\in\mathbb{R})\wedge(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\infty)\}$, $\rho_\infty(x,y)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|$, $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $y=\{y_n\}_{n=1}^\infty$; (МП ограниченных последовательностей.)

(Аргументацию выбора индексов у l и ρ в пунктах (а), (б) и (в) см. в пункте (г).)

(б) $X=l_1$, где $l_1=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\,|\,(\forall n\in\mathbb{N}: x_n\in\mathbb{R})\wedge(\sum\limits_{n=1}^\infty|x_n|<\infty)\}$, $\rho_1(x,y)=\sum\limits_{i=1}^\infty|x_i-y_i|$, $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $y=\{y_n\}_{n=1}^\infty$;

(в) $X=l_2$, где $l_2=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\,|\,(\forall n\in\mathbb{N}: x_n\in\mathbb{R})\wedge(\sum\limits_{n=1}^\infty x_n^2<\infty)\}$, $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^\infty(x_i-y_i)^2}$, $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $y=\{y_n\}_{n=1}^\infty$;

(г)* $X=l_p$, где $l_p=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\,|\,(\forall n\in\mathbb{N}: x_n\in\mathbb{R})\wedge(\sum\limits_{n=1}^\infty|x_n|^p<\infty)\}$,

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad x=\{x_n\}_{n=1}^\infty,\ y=\{y_n\}_{n=1}^\infty,\ 1\le p<\infty.$$

В частности, при $p=1$ получается пространство (l_1,ρ_1), а при $p=2$ – пространство (l_2,ρ_2). Докажите, что при $1\le p<q\le\infty$ имеет место включение $l_p\subset l_q$ и для $\forall x\in l_1\ \forall y\in l_1$ справедливы неравенства:

$$\rho_\infty(x,y)\le\rho_q(x,y)\le\rho_p(x,y)\le\rho_1(x,y).\tag{1.5}$$

Покажите, что $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\rho_\infty(x,y)$.

(д)* $X=l_p$, где $l_p=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\,|\,(\forall n\in\mathbb{N}: x_n\in\mathbb{R})\wedge(\sum\limits_{n=1}^\infty|x_n|^p<\infty)\}$,

$\rho_p(x,y)=\sum\limits_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^p$, $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $y=\{y_n\}_{n=1}^\infty$, $0<p\le1$. Докажите, что при $0<p<q\le1$ имеет место включение $l_p\subset l_q$ и для $\forall x\in l_p\ \forall y\in l_p$ справедливы неравенства:

$$\rho_1^{pq}(x,y)\le\rho_q^{p}(x,y)\le\rho_p^{q}(x,y).$$

(е) $X=s$, где $s=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – семейство всех числовых последовательностей,

$$\rho_s(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|},\ x=\{x_n\}_{n=1}^\infty,\ y=\{y_n\}_{n=1}^\infty.$$

1.1.8*. Проверьте, что (X_p,ρ_p) – псевдометрическое пространство, если X_p – семейство вещественных функций $x=x(t)$, определённых на $[a,b]$, за исключением, возможно, конечного множества точек, и

$$\int_a^b|x(t)|^p\,dt<\infty,$$

где интеграл понимается в смысле Римана, но может быть и несобственным, а

$$\rho_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ x=x(t),\ y=y(t),\ 1\le p<\infty.$$

Переходя с помощью описанной выше процедуры к фактор-пространству, отвечающему псевдометрике ρ_p, получаем метрическое пространство, которое обозначается $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$ или просто $\mathcal{R}^p[a,b]$ (для соответствующей невырожденной метрики сохраняем обозначение ρ_p). Докажите, что при $1\le p<q<\infty$ имеет место включение $\mathcal{R}^q[a,b]\subset\mathcal{R}^p[a,b]$ и для $\forall x\in\mathcal{R}^q[a,b]$ $\forall y\in\mathcal{R}^q[a,b]$ справедливо неравенство

$$\rho_p(x,y) \le (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \rho_q(x,y). \qquad (1.6)$$

Замечания. 1) Таким же образом определяются при $p \in [1,+\infty)$ МП $\mathcal{R}^p[a,+\infty)$, $\mathcal{R}^p(-\infty,a]$ и $\mathcal{R}^p(-\infty,+\infty)$, но в этом случае аналогичные включения, равно как и включения в другую сторону, а также неравенства типа (1.6) не имеют места. (Дайте соответствующую аргументацию!)

2) Ничем принципиально не отличается построение МП $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$ при $0 < p \le 1$, если определить ρ_p следующим образом:

$$\rho_p(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|^p\, dt,\ \ x = x(t),\ \ y = y(t).$$

3) Можно ввести понятие МП $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$ и при $p = \infty$, но мы не будем этого делать из-за необходимости существенного усложнения определений множества X_∞ и метрики ρ_∞. Такие и даже более общие построения (как и при других $p \in [1,+\infty)$) традиционно проводятся в курсе функционального анализа с использованием понятий измеримой функции и интеграла Лебега. Отметим также, что если $\mathcal{R}[a,b]$ – семейство собственно интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a,b]$ (не путать с $\mathcal{R}^1[a,b]$!), то $\mathcal{R}[a,b]$ содержится в пересечении всех $\mathcal{R}^p[a,b]$ при $1 \le p < \infty$, но не совпадает с ним, так как, например, функция $x_0(t) = \ln\frac{1}{t} \in \mathcal{R}^p[0,1]$ при всех $p \in [1,+\infty)$, но $x_0(t) \notin \mathcal{R}[0,1]$.

4) О связи между МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_p)$ и $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$ речь пойдёт ниже (см. замечание об изометрической эквивалентности в §1.7).

1.1.9. Проверьте, что (B,ρ_B) – МП, если $B = B(X)$ – семейство ограниченных числовых функций на произвольном непустом множестве X, а $\rho_B(f,g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x)-g(x)|$, $f = f(x)$, $g = g(x)$.

Это МП является частным случаем МП, рассмотренного в следующем упражнении.

1.1.10. Пусть X – непустое множество и (Y,ρ_Y) – МП. Рассмотрим семейство
$$B = B(X,Y) = \{f = f(x) \mid (f : X \to Y) \wedge (\sup\{\rho(f(x_1),f(x_2)) \mid x_i \in X\ (i=1,2)\} < +\infty)\}$$
ограниченных отображений из X в Y. Докажите, что функция $\rho_B(f,g) = \sup\limits_{x\in X} \rho_Y(f(x),g(x))$, $f = f(x)$, $g = g(x)$, является метрикой на B.

1.1.11. (Угловые метрики на прямой.) Проверьте, что $(\mathbb{R},\rho)$ – МП, если:

(*а*) $\rho(x,y) = |\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y|$. (В этом пространстве расстояние между точками $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ измеряется величиной угла, под которым из точки $(0,1)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ виден отрезок, соединяющий эти точки, если $\mathbb{R}$ отождествить с осью абсцисс.)

(*б*)* $\rho(x,y) = \mathrm{arctg}\,|x-y|$. (В этом пространстве расстояние между точками $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ измеряется величиной угла, под которым из точки $(x,1)$ (или из точки $(y,1)$) плоскости $\mathbb{R}^2$ виден отрезок, соединяющий эти точки, если $\mathbb{R}$ отождествить с осью абсцисс.)

Следующее упражнение, как обобщение предыдущего, даёт возможность по одной метрике строить на том же множестве другие метрики, обладающие при этом какими-нибудь дополнительными свойствами, например. ограниченностью.

1.1.12.* Пусть (X,ρ) – МП и $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: (*а*) $(\varphi(u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$; (*б*) $\varphi(u)$ не убывает на $[0,+\infty)$; (*в*) $\varphi(u)$ вогнута на $[0,+\infty)$. Докажите, что $\hat{\rho}(x,y) = \varphi(\rho(x,y))$ – метрика в X.

1.1.13. Пусть (X,ρ) – МП. Покажите, что ρ_i, $1 \le i \le 3$, являются метриками на X, а ρ_i, $4 \le i \le 7$, вообще говоря, – нет. В случае $4 \le i \le 7$ приведите примеры конкретных МП (X,ρ) таких, что ρ_i не являются метриками на X.

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)};\ \ \rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y),1\};\ \ \rho_3(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)};$$

$$\rho_4(x,y) = \rho^2(x,y);\ \ \rho_5(x,y) = \frac{1}{1+\rho(x,y)};\ \ \rho_6(x,y) = 2^{\rho(x,y)} - 1;\ \ \rho_7(x,y) = \sqrt{1+\rho^2(x,y)} - 1.$$

В качестве примера решения подобных упражнений рассмотрим $\rho_6(x,y)$ для естественной метрики $\rho\,(x,y) = |x-y|$ на числовой оси. Эта функция не является метрикой на $\mathbb{R}$, так как, хотя она, очевидно, удовлетворяет аксиомам (1) и (2), но не удовлетворяет аксиоме (3). В самом деле, для $\rho_6(x,y)$ аксиома треугольника принимает вид:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} : 2^{|x-y|} - 1 \le (2^{|x-z|} - 1) + (2^{|z-y|} - 1),$$

что неверно, например, при $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$.

Замечание. Обращаем внимание на ограниченность метрик $\rho_1(x,y)$ и $\rho_2(x,y)$ независимо от ограниченности или неограниченности метрики $\rho(x,y)$.

§ 1.2. Шары и сферы в МП. Ограниченные множества в МП. Подпространства в МП.

В метрических пространствах можно ввести некоторые простейшие геометрические понятия.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in X$ называется множество

$$U_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}.$$

Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $a \in X$ называется множество
$$K_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) \le r\}.$$
Сферой радиуса r с центром в точке $a \in X$ называется множество
$$S_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) = r\}.$$

Замечание. Отметим, что введение такой терминологии мотивируется, очевидно, тем, что в МП $(\mathbb{R}^3,\rho_2)$ из упр.1.1.5(*б*) определённые выше шары и сферы, без существенной потери общности, можно рассматривать как обычные шары и сферы в трёхмерном евклидовом пространстве.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП, $A \subset X$. Диаметром множества A в МП (X,ρ) называется

$$d(A) = \mathrm{diam}\, A = \sup_{x\in A,\ y\in A} \rho(x,y),$$

причём $d(A) \in [0,+\infty]$. Множество A называется ограниченным, если $\mathrm{diam}\, A < +\infty$, и неограниченным, если $\mathrm{diam}\, A = +\infty$. Пустое множество $\varnothing$ принято считать ограниченным с $\mathrm{diam}\varnothing = 0$.

Ясно, что в случае ограниченной метрики ρ все подмножества (в том числе и всё пространство X) в МП (X,ρ) ограничены.

Определение. Пусть (X,ρ_X) – МП, $Y \subset X$ и $\rho_Y = \rho_X|_{Y^2}$ (сужение функции ρ_X на $Y \times Y$). Пара (Y,ρ_Y) называется подпространством метрического пространства (X,ρ_X).

Замечание. Очевидно, что ρ_Y – метрика на множестве Y, и, следовательно, (Y,ρ_Y) – МП. При этом говорят, что метрика ρ_Y индуцируется метрикой ρ_X на подпространстве Y. Отметим также, что шары и сферы в подпространстве (Y,ρ_Y) являются пересечениями с Y соответственно шаров и сфер в (X,ρ_X) с теми же центрами и радиусами.

Ясно, что МП $(C[a,b],\ \rho_\infty)$ становится подпространством МП из упр.1.1.9, если положить $X=[a,b]$.

Упражнения. 1.2.1. Пусть (X,ρ) – МП, $A\subset X$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) Множество A ограничено в МП (X,ρ); (*б*) $\exists a\in X\ \exists r>0: A\subset U_r(a)$;

(*в*) $\forall a\in X\ \exists r>0: A\subset U_r(a)$.

Докажите также эквивалентность следующих утверждений:

(*г*) Множество A не ограничено в МП (X,ρ);

(*д*) $\exists a\in X\ \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A:\ \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=+\infty$;

(*е*) $\forall a\in X\ \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A:\ \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=+\infty$.

1.2.2. Пусть (X,ρ) – МП.

(*а*) Докажите, что диаметры шаров и сфер не превосходят их удвоенных радиусов, то есть $\operatorname{diam}U_r(a)\le 2r$, $\operatorname{diam}K_r(a)\le 2r$ и $\operatorname{diam}S_r(a)\le 2r$. Могут ли эти неравенства быть строгими? Могут ли перечисленные диаметры равняться нулю?

(*б*) Пусть $A\subset X$, $B\subset X$. Докажите, что в случае $A\bigcap B\ne\varnothing$ имеет место неравенство

$$d(A\bigcup B)\le d(A)+d(B).$$

(*в*)* Покажите, что в случае $A\bigcap B=\varnothing$ предыдущая оценка неверна, и докажите неравенство

$$d(A\bigcup B)\le d(A)+d(B)+\rho(A,B),$$

где $\rho(A,B)=\inf\limits_{x\in A,\ y\in B}\rho(x,y)$ – расстояние между множествами A и B (см. § 1.4).

1.2.3. (*а*) Покажите, что в МП $(\mathbb{R}^3,\rho_\infty)$ шары имеют форму куба, то есть

$$U_r(a)=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid\forall i\in\{1,2,3\}: a_i-r<x_i<a_i+r\}. \qquad (1.7)$$

(*б*) Убедитесь в том, что в МП $(\mathbb{R}^3,\rho_1)$ шары имеют форму правильных октаэдров, записав эти множества в виде, аналогичном (1.7).

(*в*) Что представляют собой шары и сферы в МП $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$, $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$ и $(\mathbb{R}^2,\rho_\infty)$? Дайте соответствующие иллюстрации.

1.2.4. Как от радиуса и положения центра зависит форма шаров и сфер в метрических пространствах на $\mathbb{R}$, порождаемых угловыми метриками из упр.1.1.11? Дайте соответствующие иллюстрации.

1.2.5. Дайте описание шаров и сфер различных радиусов в МП с дискретной метрикой (упр.1.1.4). Какие из этих множеств всегда непустые, а какие могут оказаться пустыми? Как от радиуса r зависит справедливость строгого включения $U_r(a)\subset K_r(a)$?

1.2.6. (*а*) Могут ли в МП совпасть шар и сфера (не обязательно с общим центром и одинаковых радиусов)?

(*б*) Можно ли в некотором МП в шар меньшего радиуса поместить целиком шар большего радиуса, причём так, чтобы он не заполнял весь шар меньшего радиуса? (См. Я.Гашек, "Похождения бравого солдата Швейка", ч.I, гл.4: "…внутри земного шара находится другой шар, значительно больше наружного…".)

Используя понятие индуцированной метрики можно построить немало поучительных примеров МП, с помощью которых легко получить ответы на вопросы упр.1.2.5, а также

увидеть как непривычно могут выглядеть шары в этих МП, реализованных на плоскости (упр.1.2.7), по сравнению с МП $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$. Кроме того, обратите внимание на ещё один способ введения метрики посредством объявления ограничений на ''движение'', то есть введением ''запретных зон'' (упр.1.2.7 (*г*), (*д*)).

1.2.7. Пусть (Y,ρ_Y) – МП, где $Y\subset\mathbb{R}^2$ и ρ_Y – метрика, индуцированная на Y евклидовой метрикой ρ_2 на плоскости.

(*а*) $Y=\{x=(x_1,x_2): x_2\ge 0\}$ (верхняя полуплоскость). Убедитесь, что формы шаров и сфер зависят от положения их центров и радиусов. При перемещении шары и сферы могут менять свою форму.

(*б*) $Y=\mathbb{Z}^2$ (целочисленная решётка). Изобразите шары (открытые и замкнутые) и сферы при $0<r<1$, $r=1$, $r>1$. Найдите зависимость их диаметров от радиуса.

(*в*) $Y=\{x=(x_1,x_2): x_1^2+x_2^2\le 1\}$ (единичный евклидов круг или ''пространство Швейка''). Рассмотрите в этом МП шары и сферы с радиусами $r>1-\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, где $a=(a_1,a_2)\in Y$ – их центры. Дайте иллюстрацию в этом МП к утвердительному ответу на вопрос упр.1.2.6(*б*).

(*г*)* (Плоскость с ''таможней''.) Пусть $X=\mathbb{R}^2$ и сообщение между (замкнутой) верхней полуплоскостью Y (см. пункт (*а*)) и (открытой) нижней полуплоскостью $X\setminus Y$ возможно только через начало координат (точку $\theta=(0,0)$), то есть на X задана следующая метрика

$$\rho(x,y)=\begin{cases}\rho_2(x,y), & \{x,y\}\subset Y,\\ \rho_2(x,y), & \{x,y\}\subset X\setminus Y,\\ \rho_2(x,\theta)+\rho_2(\theta,y), & (x\in Y,\ y\in X\setminus Y)\vee(x\in X\setminus Y,\ y\in Y),\end{cases}$$

$x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. (Проверьте, что это действительно метрика на X!) Изобразите шары и сферы в МП (X,ρ) с центром в точке $a=(a_1,a_2)$ и радиуса r, если:
1) $a=\theta$; 2) $a_2\ne 0,\ 0<r<|a_2|$; 3) $a_2>0,\ r=a_2$; 4) $a_1\ne 0,\ a_2<0,\ r=-a_2$; 5) $a_1\ne 0,\ a_2\ne 0,\ |a_2|<r<\sqrt{a_1^2+a_2^2}$; 6) $a_1\ne 0,\ a_2=0,\ 0<r\le|a_1|$; 7) $a_1\ne 0,\ a_2=0,\ r>|a_1|$; 8) $a_1=0,\ a_2\ne 0,\ r>|a_2|$; 9) $a_1\ne 0,\ a_2\ne 0,\ r>\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

(*д*)* (''Лесная'' метрика на полуплоскости.) Пусть $X=\{x=(x_1,x_2): x_2\ge 0\}$ – верхняя полуплоскость и пусть прямая $Y=\{x=(x_1,x_2): x_2=0\}\subset X$ – это ''земля'', а все вертикальные лучи вида $Z_c=\{x=(x_1,x_2):(x_1=c)\wedge(x_2\ge 0)\}\subset X$, $c\in\mathbb{R}$, – ''деревья'', так что перебраться с одного ''дерева'' на другое можно, лишь спустившись на ''землю''. Иначе говоря, на X задана следующая метрика:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}|x_2-y_2|, & x_1=y_1,\\ |x_1-y_1|+x_2+y_2, & x_1\ne y_1,\end{cases}$$

$x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. Изобразите шары и сферы в МП (X,ρ) с центром в точке $a=(a_1,a_2)$ и радиуса r, если: 1) $a_2=0$; 2) $0<r\le a_2$; 3) $0<a_2<r$.

В заключение этого пункта приведём ещё один пример весьма необычного МП.

1.2.8*. (Метрика шахматного коня.) Под расстоянием от клетки A до клетки B шахматной доски будем понимать минимальное число ходов шахматного коня, необходимых для перехода из A в B. Можно доказать, что это действительно метрика на подмножестве множества $\mathbb{Z}^2$, образованном парами чисел – координат центров клеток шахматной доски. (Метрика шахматного коня подробно исследуется в журнале ''Квант'', №10, 1981, с.13-16.)

§ 1.3. Сходимость последовательностей в МП. Сравнение метрик.

Введём в МП понятие предельного перехода – основной операции математического анализа.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек в X, $a \in X$. Точка a называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в МП (X,ρ), если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$. При этом последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся к a в МП (X,ρ). Для сходящейся к a последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ используют обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a\ (n\to\infty)$, добавляя, если необходимо, в скобках метрику ρ, относительно которой имеет место сходимость последовательности.

Таким образом,

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : \rho(x_n, a) < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall U_\varepsilon(a)\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : x_n \in U_\varepsilon(a)). \qquad (1.8)$$

Обращаем внимание на то, что последний вариант определения ничем не отличается от соответствующего определения предела числовой последовательности, если под ε-окрестностью точки a в МП (X,ρ) понимать открытый шар $U_\varepsilon(a)$. Если ввести более общее понятие окрестности $U(a)$ точки a в МП (X,ρ), как произвольное множество, содержащее некоторую ε-окрестность точки a, то определение (1.8), очевидно, будет равносильно следующему

$$\forall U(a)\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : x_n \in U(a),$$

то есть последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке a в МП (X,ρ), если для любой окрестности $U(a)$ точки a все члены последовательности попадают в $U(a)$, исключая, возможно, конечное число её членов.

Для дальнейшего изложения нам понадобится также понятие проколотой окрестности точки $a \in X$, которую будем обозначать $\overset{\circ}{U}(a)\ (= U(a)\setminus\{a\})$.

Определение. Пусть ρ_1 и ρ_2 – две метрики на множестве X. Говорят, что метрика ρ_1 не слабее метрики ρ_2 (или метрика ρ_2 не сильнее метрики ρ_1, или метрика ρ_2 подчинена метрике ρ_1), если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : (\lim_{n\to\infty} x_n = a\,(\rho_1)) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} x_n = a\,(\rho_2)),$$

то есть, если из сходимости любой последовательности в МП (X,ρ_1) вытекает её сходимость в МП (X,ρ_2), причём к тому же пределу. Если при этом и ρ_2 не слабее ρ_1, то метрики ρ_1 и ρ_2 называются эквивалентными. Если же ρ_1 не слабее ρ_2, но эти метрики не эквивалентны, то говорят, что ρ_1 сильнее ρ_2 (или ρ_2 слабее ρ_1).

Таким образом, эквивалентные метрики порождают в соответствующих МП одно и то же семейство сходящихся последовательностей.

Тем самым в семействе метрик на множестве X вводится бинарное отношение, которое называется отношением сравнения метрик, а метрики ρ_1 и ρ_2, из которых одна не слабее другой, называются сравнимыми.

Упражнения. 1.3.1. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите следующие свойства сходящихся последовательностей:

(*а*) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\end{array}\right\} \Rightarrow (a = b)$ (единственность предела);

(*б*) $(\exists a \in X : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \Rightarrow (\operatorname{diam}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty)$ (ограниченность сходящейся последовательности);

(*в*) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\end{array}\right\} \Rightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(a,b))$ (непрерывность метрики).

1.3.2*. (*а*) Проверьте, что:

(1) отношение сравнения метрик на множестве X рефлексивно и транзитивно;

(2) отношение эквивалентности метрик на множестве X является отношением эквивалентности.

(*б*) Введя отношение сравнения классов эквивалентности посредством сравнения их произвольных сравнимых представителей (если такие существуют), проверьте корректность такого определения и антисимметричность построенного тем самым отношения частичного порядка в семействе классов эквивалентности.

(*в*) Приведите пример множества X и метрик ρ_1 и ρ_2 на X, которые не являются сравнимыми.

1.3.3. Покажите, что на $\mathbb{R}$ эквивалентными между собой являются естественная и угловые метрики (упр.1.1.11).

1.3.4. Покажите, что для любой метрики на произвольном непустом множестве существует эквивалентная ей ограниченная метрика.

1.3.5*. Покажите, что если в упр.1.1.12 дополнительно потребовать непрерывности справа в точке $u = 0$ функции $\varphi(u)$, то определённая там метрика $\hat\rho$ будет эквивалентна исходной метрике ρ. В частности, если (X,ρ) – МП, то эквивалентными метрике ρ являются метрики

$$\hat\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)};\ \hat\rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\};\ \hat\rho_p(x,y) = (\rho(x,y))^{\frac{1}{p}}\ (1 \le p < +\infty).$$

1.3.6. Пусть ρ_1 и ρ_2 – две метрики на множестве X. Докажите, что если

$$\exists c > 0\ \exists C > 0\ \forall x \in X\ \forall y \in X : c\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le C\rho_1(x,y),$$

то метрики ρ_1 и ρ_2 являются эквивалентными. Используя упр.1.3.3, покажите, что обратное утверждение неверно.

1.3.7*. (Геометрический критерий сравнимости метрик.) Пусть ρ_1 и ρ_2 – две метрики на множестве X. Докажите, что

$$(\rho_1 \text{ не слабее } \rho_2) \Leftrightarrow (\forall U_{\varepsilon_2}^{(2)}(a)\ \exists U_{\varepsilon_1}^{(1)}(a) : U_{\varepsilon_1}^{(1)}(a) \subset U_{\varepsilon_2}^{(2)}(a)),$$

где $U_{\varepsilon_i}^{(i)}(a)$ – шар в МП (X,ρ_i) $(i = 1,2)$.

1.3.8. (Сходимость в МП $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$.) Покажите, что при любом $p \in (0, +\infty]$ сходимость в МП $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ (см. упр.1.1.5) покоординатная, то есть

$$\forall \{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n, \text{ где } x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}),\ \forall a \in \mathbb{R}^n:$$

$$(\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : \lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = a_i).$$

(Слева – сходимость относительно метрики ρ_p, а справа – сходимость числовых последовательностей относительно естественной метрики.)

1.3.9. (Сходимость в МП $(\mathbf{C}[a,b], \rho_\infty)$.) Покажите, что сходимость в МП $(\mathbf{C}[a,b], \rho_\infty)$ (см. упр.1.1.6(*а*)) равномерная, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}[a,b]$, где $x_n = x_n(t)$, $\forall a = a(t) \in \mathbf{C}[a,b]$:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall t \in [a,b] : |x(t) - a(t)| < \varepsilon).$$

(Слева – сходимость относительно метрики ρ_∞, а справа – при каждом $t \in [a,b]$ сходимость

числовой последовательности $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно естественной метрики, но при любом $\varepsilon > 0$ выбор N_ε не зависит от $t \in [a,b]$.)

1.3.10*. (Сравнение классических метрик в $\mathbf{C}[a,b]$.) Покажите, что на $\mathbf{C}[a,b]$ метрика ρ_q сильнее метрики ρ_p, если $1 \le p < q \le \infty$. (См. упр.1.1.6.(*г*).)

Замечание. С учётом упр.1.1.8 аналогичный результат получается для $1 \le p < q < \infty$ на множестве интегрируемых (в собственном смысле) по Риману функций $\mathcal{R}[a,b]$ и даже на пересечении всех $\mathcal{R}^p[a,b]$ при $1 \le p < \infty$.

1.3.11*. Покажите, что на l_1 метрика ρ_p сильнее метрики ρ_q, если $1 \le p < q \le \infty$. (См.упр.1.1.7(*г*).)

В следующем упражнении даётся представление о декартовом произведении метрических пространств.

1.3.12. Пусть $(X_i, \rho_i)(i = 1,2)$ – МП и $X = X_1 \times X_2$. Докажите, что следующие функции являются метриками на *X*, если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$:

(*а*) $\rho(x,y) = \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$; (*б*) $\hat{\rho}(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2)}$;

(*в*) $\widetilde{\rho}(x,y) = \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$.

Докажите, что эти метрики эквивалентны между собой и что сходимость относительно любой из этих метрик покоординатная, то есть

$$\forall \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\}_{n=1}^{\infty} \subset X \ \forall a = (a_1, a_2) \in X :$$

$$(\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \ \ (\rho, \hat{\rho} \text{ или } \widetilde{\rho})) \Leftrightarrow ((\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1 \ \ (\rho_1)) \wedge (\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2 \ \ (\rho_2))).$$

Замечание. Несложно увидеть, что именно таким образом получаются метрики $\rho_1(x,y)$, $\rho_2(x,y)$, $\rho_\infty(x,y)$ в $\mathbb{R}^2$ из естественной метрики ρ в $\mathbb{R}$.

§ 1.4. Внутренность и замыкание множеств в МП. Граница множеств в МП.

В МП можно ввести обобщения многих понятий, хорошо известных на вещественной прямой.

Определение. Пусть (X, ρ) – МП и множество $A \subset X$.

(*а*) Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества *A*, если для любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки *a* выполняется условие $\overset{\circ}{U}(a) \cap A \neq \varnothing$. Множество предельных точек множества A называется производным множеством (множества *A*) и обозначается A'.

(*б*) Точка $a \in A$ называется изолированной точкой множества *A*, если она не является предельной точкой множества *A*, то есть существует такая окрестность $U(a)$, что $U(a) \cap A = \{a\}$. Следовательно, множество изолированных точек множества *A* есть множество $A \setminus A'$. Общее название предельных и изолированных точек – точки прикосновения множества *A*.

(*в*) Точка $a \in A$ называется внутренней точкой множества *A*, если существует такая окрестность $U(a)$, что $U(a) \subset A$. Множество внутренних точек множества *A* называется внутренностью множества *A* и обозначается $\operatorname{Int} A$ (фр. intérieur, анг. interior – внутренность). (Другое встречающееся обозначение – $\overset{\circ}{A}$.)

(*г*) Точка $a \in A$ называется внешней точкой множества *A*, если она является внутренней точкой его дополнения A^c, то есть существует такая окрестность $U(a)$, что $U(a) \subset A^c$. Множество внешних точек множества *A* называется внешностью множества *A* и обозначается $\operatorname{Ext} A$ (фр. extérieur, анг. exterior – внешность).

(*д*) Точка $a \in X$ называется граничной точкой множества *A*, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой множества *A*, то есть для любой окрестности $U(a)$ точки *a* выполняются условия:

$$U(a) \cap A \neq \varnothing \quad \wedge \quad U(a) \cap A^c \neq \varnothing.$$

Множество граничных точек множества *A* называется границей множества *A* и обозначается $\operatorname{Fr} A$ (фр. frontiére, анг. frontier – граница). (Другое встречающееся обозначение – ∂A.)

При замене окрестностей на ε-окрестности все новые определения остаются равносильными прежним. (Проверьте это!) Непосредственно из определений вытекает, что

$$(\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Ext} A) = \varnothing, (\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Fr} A) = \varnothing, (\operatorname{Fr} A) \cap (\operatorname{Ext} A) = \varnothing,$$

$$(\operatorname{Int} A) \cup (\operatorname{Fr} A) \cup (\operatorname{Ext} A) = X. \qquad (1.9)$$

Определение. Пусть (X, ρ) – МП и множество $A \subset X$. Множество точек прикосновения множества *A* обозначается $\overline{A}$ и называется замыканием множества *A*. (Другое встречающееся обозначение – $\operatorname{cl} A$, являющееся сокращением от анг. closure – замыкание.)

Введём ещё некоторые полезные понятия.

Определение. Пусть (X, ρ) – МП, $A \subset X$, $B \subset X$. Расстоянием от множества *A* до множества *B* называется величина $\rho(A,B) = \inf\limits_{x\in A,\, y\in B} \rho(x,y)$.

В частности, величина $\rho(a,A) = \inf\limits_{x\in A} \rho(x,a)$ называется расстоянием от точки $a \in X$ до множества $A \subset X$. (В этом частном случае $B = \{a\}$.)

Очевидно, что $\rho(A,B) = \rho(B,A)$.

Замечание. Не следует думать, что тем самым вводится метрика на семействе непустых подмножеств пространства *X*. Легко убедиться в том, что, в отличие от аксиомы симметрии, две другие аксиомы метрики, вообще говоря, не выполняются. (См. также упр.1.4.11(*б*).)

Упражнения. 1.4.1. Пусть $(\mathbb{R}, \rho)$ – МП, где ρ – естественная метрика. Найдите A', $A \setminus A'$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Ext} A$, $\operatorname{Fr} A$, $\overline{A}$ для множества $A \subset \mathbb{R}$, если:

(*а*) $A = \mathbb{R}$; (*б*) $A = \varnothing$; (*в*) $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$; (*г*) $A = \mathbb{N}$; (*д*) $A = \mathbb{Q}$; (*е*) $A = [0,1]$; (*ж*) $A = (0,1]$;

(*з*) $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$; (*и*) $A = [0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}$; (*к*)* $A = \{\ln n - [\ln n] : n \in \mathbb{N}\}$;

(*л*)* $A = \{n\alpha + m : (n \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})\}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; (*м*)* $A = \{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$.

(*н*) Выполните то же упражнение для множества *A* в МП, представляющем собой идеализированную земную евклидову сферическую поверхность с так называемой сферической метрикой, измеряющей расстояние между двумя точками по кратчайшей дуге большой окружности. (Проверьте, что это метрика!) Множество *A* состоит из точек, которые описываются следующим образом: пройдя из такой точки 10 км на север, затем 10 км на запад и, наконец, 10 км на юг, окажешься снова в той же точке. (Здесь длина пути измеряется длиной пройденных дуг параллелей и меридианов.)

1.4.2. Пусть (X, ρ) – МП, $A \subset X$, $a \in X$.

(*а*) Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(1) Точка *a* является предельной точкой множества *A*. (2) $\forall U(a) : U(a) \cap A$ – бесконечное множество. (3) $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. (4) $\rho(a, A \setminus \{a\}) = 0$.

(*б*) Докажите утверждение: $(a \in A') \Rightarrow (\rho(a,A) = 0)$. Покажите, что обратное утверждение неверно.

1.4.3. (*а*) Приведите примеры МП (X, ρ), множеств $A \subset X$ и точек $a \in A'$ таких, что:

1) $a \in A$; 2) $a \notin A$; 3) $A' \subset A$; 4) $A \subset A'$; 5) $(A' \not\subset A) \wedge (A \not\subset A')$.

Пусть (X, ρ) – МП. В следующих пунктах рассматриваются ещё некоторые свойства производных множеств для подмножеств пространства *X*.

(*б*) Докажите, что верно равенство $(A\bigcup B)' = A'\bigcup B'$. Покажите, что, вообще говоря, неверно равенство $(A\bigcap B)' = A'\bigcap B'$.

(*в*) Покажите, что, вообще говоря, неверно равенство

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'.$$

(*г*) Докажите, что множество $A' = \varnothing$, если множество A конечно. Покажите, что обратное утверждение неверно.

(*д*) Определим A'' как $(A')'$. Докажите, что $A'' \subset A'$.

(*е*) Покажите, что, вообще говоря, неверны как включение $A' \subset \operatorname{Fr} A$, так и включение $\operatorname{Fr} A \subset A'$.

Пусть $(\mathbb{R}, \rho)$ – МП, где ρ – естественная метрика. Докажите, что справедливы следующие утверждения:

(*ж*) $\forall A \subset \mathbb{R}$: $\operatorname{Int} A \subset A'$; (*з*) $\forall A \subset \mathbb{R}$: $A \setminus A' \subset \operatorname{Fr} A$,

и покажите, что обратные включения могут не иметь места. Покажите, что в произвольном МП утверждения (*ж*) и (*з*), вообще говоря, неверны.

1.4.4. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите следующие свойства внутренности множеств в МП:

(*а*) $\operatorname{Int}\varnothing = \varnothing$, $\operatorname{Int} X = X$; (*б*) $\forall A \subset X : \operatorname{Int} A \subset A$;

(*в*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : (A \subset B) \Rightarrow (\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B)$;

(*г*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Int}(A\bigcap B) = (\operatorname{Int} A)\bigcap(\operatorname{Int} B)$;

(*д*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Int}(A \setminus B) = (\operatorname{Int} A)\bigcap(\operatorname{Int}(B^c))$; (*е*) $\forall A \subset X : \operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$;

(*ж*) $\forall A \subset X : \operatorname{Int} A = \{x \in X : \rho(x, A^c) > 0\}$.

Покажите, что, вообще говоря, неверны утверждения:

(*з*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Int}(A\bigcup B) = (\operatorname{Int} A)\bigcup(\operatorname{Int} B)$;

(*и*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Int}(A \setminus B) = (\operatorname{Int} A)\setminus(\operatorname{Int} B)$.

Замените в (*з*) и (*и*) знаки равенства на правильные знаки включения и докажите их справедливость.

(*к*) Покажите, что для произвольного семейства $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ подмножеств пространства X, вообще говоря, неверно равенство:

$$\operatorname{Int}\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} A_n.$$

Замените знак равенства на правильный знак включения и докажите его справедливость.

1.4.5. Исходя из свойств внутренности множеств в МП (упр.1.4.4) и того, что $\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(A^c)$, докажите следующие свойства внешности множеств в МП:

(*а*) $\operatorname{Ext}\varnothing = X$, $\operatorname{Ext} X = \varnothing$; (*б*) $\forall A \subset X : \operatorname{Ext} A \subset A^c$;

(*в*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : (A \subset B) \Rightarrow (\operatorname{Ext} A \supset \operatorname{Ext} B)$;

(*г*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Ext}(A\bigcup B) = (\operatorname{Ext} A)\bigcap(\operatorname{Ext} B)$;

(*д*) $\forall A \subset X : \operatorname{Ext}((\operatorname{Ext} A)^c) = \operatorname{Ext} A$; (*е*) $\forall A \subset X : \operatorname{Ext} A = \{x \in X : \rho(x, A) > 0\}$.

Покажите, что вообще говоря, неверны утверждения:

(*ж*) $\forall A \subset X : \operatorname{Ext}(\operatorname{Ext} A) = \operatorname{Int} A$; (*з*) $\forall A \subset X : \operatorname{Ext}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Ext} A$;

(*и*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Ext}(A\bigcap B) = (\operatorname{Ext} A)\bigcup(\operatorname{Ext} B)$;

(*к*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Ext}(A \setminus B) = (\operatorname{Ext} A)\bigcup(\operatorname{Int} B)$.

Замените в (*ж*) – (*к*) знаки равенства на правильные знаки включения и докажите их справедливость.

(*л*) Покажите, что для произвольного семейства $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ подмножеств пространства X, вообще говоря, неверно равенство

$$\operatorname{Ext}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ext} A_n.$$

Замените знак равенства на правильный знак включения и докажите его справедливость.

1.4.6. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите следующие свойства границы множеств в МП:

(*а*) $\operatorname{Fr}\varnothing = \varnothing$, $\operatorname{Fr} X = \varnothing$; (*б*) $\forall A \subset X : \operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(A^c)$; (*в*) $\forall A \subset X : \operatorname{Fr}(\operatorname{Fr} A) \subset \operatorname{Fr} A$;

(*г*)* $\forall A \subset X : \operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr} A)) = \operatorname{Fr}(\operatorname{Fr} A)$; (*д*) $\forall A \subset X : \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Fr} A$;

(*е*) $\forall A \subset X : \operatorname{Fr}(\operatorname{Ext} A) \subset \operatorname{Fr} A$; (*ж*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Fr}(A\bigcup B) \subset (\operatorname{Fr} A)\bigcup(\operatorname{Fr} B)$;

(*з*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Fr}(A\bigcap B) \subset (\operatorname{Fr} A)\bigcup(\operatorname{Fr} B)$;

(*и*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \operatorname{Fr}(A \setminus B) \subset (\operatorname{Fr} A)\bigcup(\operatorname{Fr} B)$;

(*к*) $\forall A \subset X : \operatorname{Fr} A = \{x \in X : \rho(x, A) = \rho(x, A^c) = 0\}$.

Приведите примеры, показывающие, что все перечисленные включения могут быть строгими.

(*л*) Покажите, что, вообще говоря, неверно утверждение:

$$\forall A \subset X\ \forall B \subset X : (A \subset B) \Rightarrow (\operatorname{Fr} A \subset \operatorname{Fr} B).$$

1.4.7. Пусть $(\mathbb{R}, \rho)$ – МП, где ρ – естественная метрика. Докажите следующее утверждение: $\forall A \subset \mathbb{R} : (\operatorname{Fr} A = \varnothing) \Rightarrow ((A = \varnothing) \vee (A = \mathbb{R}))$. Покажите, что в произвольном МП аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.

1.4.8. Пусть (X,ρ) – МП, множество $A \subset X$ и точка $a \in X$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(*а*) Точка a является точкой прикосновения множества A. (*б*) $\forall U(a) : U(a)\bigcap A \neq \varnothing$.

(*в*) $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = a$. (*г*) $\rho(a, A) = 0$. (*д*) $a \in A\bigcup(\operatorname{Fr} A)$. (*е*) $a \in (\operatorname{Int} A)\bigcup(\operatorname{Fr} A)$.

Сравните утверждения (*а*) – (*г*) с соответствующими утверждениями упр.1.4.2.

Таким образом, из равенств (1.9) и упр.1.4.8 вытекает, что замыкание $\overline{A}$ множества A в МП (X,ρ) допускает следующие представления:

$$\overline{A} = A\bigcup A' = A\bigcup(\operatorname{Fr} A) = (\operatorname{Int} A)\bigcup(\operatorname{Fr} A) = (\operatorname{Ext} A)^c = \{x \in X : \rho(x, A) = 0\}. \qquad (1.10)$$

1.4.9. Пользуясь равенствами $\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(A^c)$ и $\overline{A} = (\operatorname{Ext} A)^c$, получите соотношения двойственности между операциями замыкания и перехода к внутренности множеств в МП:

$$(а)\ \forall A \subset X:\ \overline{A} = (\operatorname{Int}(A^c))^c; \qquad (б)\ \forall A \subset X:\ \operatorname{Int} A = \left(\overline{A^c}\right)^c \qquad (1.11)$$

Таким образом, следующие упражнения могут выполнятся либо непосредственным использованием определения операции замыкания, либо сведением посредством соотношений двойственности (1.11) доказываемых свойств замыкания к соответствующим свойствам внутренности множеств (упр 1.4.4).

1.4.10. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите следующие свойства замыкания множеств в МП:

(*а*) $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$; (*б*) $\forall A \subset X : A \subset \overline{A}$; (*в*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : (A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$;

(*г*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}$; (*д*) $\forall A \subset X : \overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

Покажите, что, вообще говоря, неверны утверждения:

(*е*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \overline{A\bigcap B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}$; (*ж*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X :\ \overline{A \setminus B} = \overline{A}\bigcap\overline{B^c}$.

Замените в (*е*) и (*ж*) знаки равенства на правильные знаки включения и докажите их справедливость.

(*з*) Покажите, что для произвольного семейства $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ подмножеств пространства X, вообще говоря, неверно равенство

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

Замените знак равенства на правильный знак включения и докажите его справедливость.

(*и*) Докажите, что $\forall A \subset X : \operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Докажите, что справедливы следующие утверждения:

(*к*) $\forall A \subset X : \operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$; (*л*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X : \overline{A \setminus B} \subset \overline{A} \setminus (\operatorname{Int} B)$,

и приведите примеры, показывающие, что включения могут быть строгими.

(*м*)* Докажите, что

$$\forall A \subset X\ \forall B \subset X : ((\overline{A} \cap B = \varnothing) \wedge (A \cap \overline{B} = \varnothing)) \Rightarrow (\operatorname{Fr}(A \cup B) = (\operatorname{Fr} A) \cup (\operatorname{Fr} B)).$$

(*н*) Проверьте, что в МП $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ справедливы утверждения:

1) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(a)} = K_\varepsilon(a)$; 2) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : \operatorname{Int} \overline{U_\varepsilon(a)} = U_\varepsilon(a)$;

3) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : \operatorname{Fr} U_\varepsilon(a) = \operatorname{Fr} K_\varepsilon(a) = S_\varepsilon(a)$.

Покажите, что в произвольном МП эти утверждения, вообще говоря, неверны.

1.4.11*. Пусть (X, ρ) – МП. Докажите следующие неравенства:

(*а*) $\forall A \subset X\ \forall x \in X\ \forall y \in X : |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \le \rho(x, y)$;

(*б*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X\ \forall C \subset X : \rho(A, C) \le \rho(A, B) + \rho(B, C) + \operatorname{diam} B$;

(*в*) $\forall A \subset X\ \forall B \subset X\ \forall C \subset X : \rho(A, C) \le \rho(A, B) + \rho(A \cup B, C) + \operatorname{diam} B$.

§ 1.5. Топология в МП.

Метрические пространства являются частным случаем так называемых топологических пространств (ТП). Многие из уже рассмотренных понятий (окрестность, внутренность, внешность, граница и замыкание множеств) являются топологическими, то есть появляются и в более общем случае ТГ. Не углубляясь в теорию таких пространств, введём ещё некоторые из основных топологических понятий в МП, попутно заметив, что не все из сформулированных ниже утверждений справедливы в случае ТП.

Определение. Пусть (X, ρ) – МП.

(*а*) Множество $G \subset X$ называется открытым, если $\operatorname{Int} G = G$. Семейство открытых множеств в пространстве X называется топологией в МП (X, ρ) и обозначается $\mathfrak{G}$, или, более подробно, $\mathfrak{G}_\rho = \mathfrak{G}_\rho(X)$. ($\mathfrak{G}$ – готический вариант написания первой буквы *G* нем. Gebiet – область.)

(*б*) Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если $\overline{F} = F$. Семейство замкнутых множеств в пространстве X обозначается $\mathfrak{F}$, или, более подробно, $\mathfrak{F}_\rho = \mathfrak{F}_\rho(X)$. ($\mathfrak{F}$ – готический вариант написания буквы *F*, с которой начинается фр. fermé – замкнутый.)

Множество $A \subset X$ называется открыто-замкнутым, если оно и открыто, и замкнуто, то есть $A \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}$.

Замечание. Иногда семейство $\mathfrak{F}$ называют замкнутой топологией в МП (X, ρ), называя при этом $\mathfrak{G}$ открытой топологией, однако такая терминология не является общепринятой. Впрочем, также не являются общеупотребительными и обозначения $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$. К сожалению, за почти столетний период создания и развития этой теории единые терминология и обозначения всё ещё не сформированы в окончательном виде.

Если МП (Y, ρ_Y) является подпространством МП (X, ρ_X), то топология $\mathfrak{G}_{\rho_Y}(Y)$ называется топологией, индуцированной на Y топологией $\mathfrak{G}_\rho(X)$. (Аргументацию этой терминологии см. в упр.1.5.11.)

Определение. Пусть (X, ρ) – МП, $A \subset X$. Множество $U_\varepsilon(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < \varepsilon\}$ называется ε-окрестностью множества A в МП (X, ρ). Окрестностью множества A называется произвольное множество $U = U(A)$ такое, что $A \subset \operatorname{Int} U$, причём в случае $U \in \mathfrak{G}$ говорят об открытой окрестности множества A.

Ниже мы увидим (упр.1.5.8(*б*)), что ε-окрестность $U_\varepsilon(A)$ является частным случаем окрестности $U(A)$ множества A. Отметим также, что в случае $A = \{a\}$ отсюда получаются введённые ранее понятия ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ и окрестности $U(a)$ точки $a \in X$ в МП (X, ρ).

Упражнения. 1.5.1. Пусть (X, ρ) – МП. Докажите, что справедливы следующие утверждения:

(*а*) $\forall A \subset X : \operatorname{Int} A \in \mathfrak{G}$; (*б*) $\forall A \subset X : \overline{A} \in \mathfrak{F}$; (*в*) $\forall G \in \mathfrak{G}\ \forall A \subset X : (G \subset A) \Rightarrow (G \subset \operatorname{Int} A)$;

(*г*) $\forall A \subset X\ \forall F \in \mathfrak{F} : (A \subset F) \Rightarrow (\overline{A} \subset F)$.

(Утверждения (*а*) – (*г*) можно трактовать следующим образом: внутренность множества *A* является наибольшим открытым множеством, содержащимся в *A*, и, двойственным образом, замыкание множества *A* является наименьшим замкнутым множеством, содержащим *A*.)

(*д*) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \in \mathfrak{G}$; (*е*) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(a) \in \mathfrak{F}$; (*ж*) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(a) \in \mathfrak{F}$.

(Тем самым оправданы названия: $U_\varepsilon(a)$ – открытый, а $K_\varepsilon(a)$ – замкнутый шар.)

1.5.2. Пусть (X, ρ) – МП. Докажите следующие основные свойства открытых множеств:

(*а*) $\varnothing \in \mathfrak{G}, X \in \mathfrak{G}$; (*б*) $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{G} : \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathfrak{G}$; (*в*) $\forall \{G_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{G} : \bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathfrak{G}$.

(Говорят, что топология $\mathfrak{G}$ замкнута относительно операций объединения произвольных и пересечения конечных подсемейств семейства открытых множеств. Здесь термин "замкнута" не совсем удачный и употребляется в ином, чем определялось выше, смысле.)

Двойственность операций замыкания и перехода к внутренности множества порождает аналогичные взаимосвязи между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$, что сформулировано в упражнении 1.5.3.

1.5.3. Пусть (X, ρ) – МП. Докажите утверждение:

(*а*) $\forall G \subset X : (G \in \mathfrak{G}) \Leftrightarrow (G^c \in \mathfrak{F})$, или, что то же самое, но в других обозначениях:

(*б*) $\forall F \subset X : (F \in \mathfrak{F}) \Leftrightarrow (F^c \in \mathfrak{G})$.

Теперь легко вывести свойства замкнутых множеств из соответствующих свойств открытых множеств.

1.5.4. Пусть (X, ρ) – МП. Докажите следующие основные свойства замкнутых множеств:

(*а*) $\varnothing \in \mathfrak{F}, X \in \mathfrak{F}$; (*б*) $\forall \{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{F} : \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathfrak{F}$; (*в*) $\forall \{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{F} : \bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathfrak{F}$.

1.5.5. Пусть (X, ρ) – МП с дискретной метрикой (упр.1.1.4). Покажите, что в этом МП $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} = \operatorname{Exp} X$, где $\operatorname{Exp} X$ – семейство всех подмножеств множества X.

1.5.6*. Докажите, что всякое непустое открытое множество на прямой с естественной метрикой представляет собой объединение не более чем счётного семейства попарно не пересекающихся интервалов, среди которых возможны и неограниченные.

1.5.7. Пусть (X, ρ) – МП, $G \subset X$, $F \subset X$, $A \subset X$. Докажите следующие критерии:

(*а*) $(G \in \mathfrak{G}) \Leftrightarrow (\operatorname{Fr} G = \overline{G} \setminus G) \Leftrightarrow (G \cap \operatorname{Fr} G = \varnothing)$;

(*б*) $(F \in \mathfrak{F}) \Leftrightarrow (\operatorname{Fr} F = F \setminus (\operatorname{Int} F)) \Leftrightarrow ((F^c) \cap \operatorname{Fr} F = \varnothing)$;

(*в*) $(A \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}) \Leftrightarrow (\operatorname{Fr} A = \varnothing)$.

(*г*) Докажите, что в МП $(\mathbb{R}, \rho)$, где ρ – естественная метрика, открыто-замкнутыми множествами являются лишь $\varnothing$ и $\mathbb{R}$. Приведите пример такого подмножества $Y \subset \mathbb{R}$, что в соответствующем подпространстве (Y, ρ_Y) МП $(\mathbb{R}, \rho)$, кроме $\varnothing$ и Y, существуют другие открыто-замкнутые множества.

(*д*) Докажите справедливость следующего утверждения: $\forall F \in \mathfrak{F} : \operatorname{Fr}(\operatorname{Fr} F) = \operatorname{Fr} F$. (Ср. с упр.1.4.6(*в*).)

1.5.8. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите следующие утверждения:

(*а*) $\forall A\subset X\,\forall\varepsilon>0: U_\varepsilon(A)=\bigcup\limits_{x\in A}U_\varepsilon(x)$; (*б*) $\forall A\subset X\,\forall\varepsilon>0: U_\varepsilon(A)\in\mathfrak{G}$;

(*в*) $\forall A\subset X:\ \overline{A}=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}U_\varepsilon(A)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_{\frac{1}{n}}(A)$; (*г*) $\forall A\subset X:\ \operatorname{Int}A=\bigcup\limits_{\varepsilon>0}(U_\varepsilon(A^c))^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(U_{\frac{1}{n}}(A^c))^c$.

1.5.9*. (Топологический критерий сравнимости метрик.) Пусть ρ_1 и ρ_2 – две метрики на множестве *X*. Докажите, что справедливо следующее утверждение:

$$(\rho_1 \text{ не слабее } \rho_2)\Leftrightarrow(\mathfrak{G}_{\rho_1}\supset\mathfrak{G}_{\rho_2}).$$

В частности, метрики на множестве *X* эквивалентны в том и только в том случае, если они порождают одну и ту же топологию в соответствующих МП.

1.5.10. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите, что справедливы следующие утверждения:

(*а*) $\forall G\in\mathfrak{G}$: $\operatorname{Int}\overline{G}\supset G$; (*б*) $\forall F\in\mathfrak{F}$: $\overline{\operatorname{Int}F}\subset F$.

Покажите, что включения в (*а*) и (*б*) могут быть строгими.

(*в*)* $\forall G\in\mathfrak{G}$: $(\operatorname{Int}\overline{G}=G)\Leftrightarrow(\exists F\in\mathfrak{F}: G=\operatorname{Int}F)$;

(*г*)* $\forall F\in\mathfrak{F}$: $(\overline{\operatorname{Int}F}=F)\Leftrightarrow(\exists\, G\in\mathfrak{G}: F=\overline{G})$.

1.5.11. Пусть МП (Y,ρ_Y) является подпространством МП (X,ρ_X). Докажите следующие утверждения:

(*а*) $\forall G\subset Y: (G\in\mathfrak{G}_{\rho_Y})\Leftrightarrow(\exists\hat{G}\in\mathfrak{G}_{\rho_X}: G=\hat{G}\cap Y)$;

(*б*) $\forall F\subset Y: (F\in\mathfrak{F}_{\rho_Y})\Leftrightarrow(\exists\hat{F}\in\mathfrak{F}_{\rho_X}: F=\hat{F}\cap Y)$;

(*в*) $\forall G_1\in\mathfrak{G}_{\rho_Y}\,\forall G_2\in\mathfrak{G}_{\rho_Y}: (G_1\cap G_2=\varnothing)\Rightarrow(\exists\{\hat{G}_1,\hat{G}_2\}\subset\mathfrak{G}_{\rho_X}: (G_i=\hat{G}_i\cap Y(i=1,2))\wedge$
$\wedge(\hat{G}_1\cap\hat{G}_2=\varnothing))$.

1.5.12*. (*а*) (Свойство нормальной отделимости МП.) Пусть (X,ρ) – МП и F_i $(i=1,2)$ – непересекающиеся замкнутые множества в *X*. Докажите, что существуют непересекающиеся окрестности $U_i=U_i(F_i)$ множеств F_i $(i=1,2)$.

(*б*) Докажите, что свойство нормальной отделимости равносильно следующему утверждению:

$$\forall F\in\mathfrak{F}\ \forall G\in\mathfrak{G}: (F\subset G)\Rightarrow(\exists G_1\in\mathfrak{G}: F\subset G_1\subset\overline{G_1}\subset G).$$

1.5.13*. (Свойство совершенной нормальности МП.) Пусть (X,ρ) – МП и пусть

$$\mathfrak{G}_\delta=\{A\subset X\mid\exists\{G_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{G}: A=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\},\quad \mathfrak{F}_\sigma=\{B\subset X\mid\exists\{F_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{F}: B=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\}.$$

Докажите, что справедливо следующие включение: $\mathfrak{G}\cup\mathfrak{F}\subset\mathfrak{G}_\delta\cap\mathfrak{F}_\sigma$. Приведите пример МП, для которого это включение строгое.

1.5.14*. (Метрика Хаусдорфа.) Пусть (X,ρ) – МП и $\mathfrak{F}_b$ – семейство непустых ограниченных замкнутых множеств в этом МП. Докажите, что $(\mathfrak{F}_b, d)$ – МП, где

$$d(F_1,F_2)=\max\{\sup_{x\in F_1}\rho(x,F_2),\ \sup_{y\in F_2}\rho(y,F_1)\},\ \ F_i\in\mathfrak{F}_b\ (i=1,2).$$

§ 1.6. Плотные, всюду плотные и нигде не плотные множества в МП. Сепарабельные МП. Множества первой и второй категории в МП.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП, $A\subset B\subset X$. Множество *A* называется плотным в множестве *B*, если $\overline{A}\supset B$. В частности, множество *A* называется всюду плотным (в пространстве *X*), если $B=X$, то есть в случае выполнения равенства $\overline{A}=X$.

Определение. МП (X,ρ) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное всюду плотное подмножество в пространстве *X*.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП, $A\subset X$. Множество *A* называется нигде не плотным (в пространстве *X*), если оно не является плотным ни в одном шаре МП (X,ρ), то есть при выполнении условия:

$$\forall U_\varepsilon(x)\exists U_\delta(y)\subset U_\varepsilon(x): U_\delta(y)\cap A=\varnothing.$$

Следующие понятия, играющие важную роль в современном математическом анализе, были введены французским математиком Р. Бэром (R. Baire).

Определение. Пусть (X,ρ) – МП и $A\subset X$. Множество *A* называется множеством первой категории, или тощим множеством, в МП (X,ρ), если оно представимо в виде объединения не более чем счётного семейства нигде не плотных в этом пространстве множеств. Множество, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории.

Упражнения.1.6.1. Пусть (X,ρ) – МП, $A\subset B\subset X$. Докажите, что утверждения (*а*)-(*д*) эквивалентны:

(*а*) *A* плотно в *B*; (*б*) $\forall b\in B\,\forall\varepsilon>0\,\exists a\in A: a\in U_\varepsilon(b)$; (*в*) $\forall b\in B\,\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A: \lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$;

(*г*) $\forall b\in B: \rho(b,A)=0$; (*д*) *A* всюду плотно в подпространстве (B,ρ_B) МП (X,ρ).

(*е*) Пусть $A\subset B\subset C\subset X$, и *A* плотно в *B*, а *B* плотно в *C*. Докажите, что *A* плотно в *C*.

1.6.2. Пусть (X,ρ) – МП, $A\subset X$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) *A* всюду плотно в *X*; (*б*) $\operatorname{Ext}A=\varnothing$; (*в*) $\forall x\in X\,\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A: \lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$;

(*г*) $\forall x\in X: \rho(x,A)=0$.

1.6.3. Пусть (X,ρ) – МП, $A\subset X$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) *A* нигде не плотно в *X*; (*б*) $\overline{A}$ нигде не плотно в *X*; (*в*) $\overline{\operatorname{Ext}A}=X$ (*г*) $\operatorname{Int}\overline{A}=\varnothing$.

1.6.4. (*а*) Докажите, что в МП (X,ρ) с дискретной метрикой единственным всюду плотным множеством является *X*, а единственным нигде не плотным множеством является $\varnothing$.

(*б*) Докажите, что в МП одноэлементное множество $A=\{a\}$ является нигде не плотным в том и только в том случае, если *a* не является изолированной точкой этого МП.

1.6.5. (*а*) Докажите, что дополнение нигде не плотного в МП множества всюду плотно в этом МП. Покажите, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Более того, приведите пример всюду плотного в МП множества, дополнение которого тоже является всюду плотным в этом МП.

(*б*) Приведите пример последовательности всюду плотных в МП множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется включение $A_n\supset A_{n+1}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$.

(*в*) Докажите, что дополнение к открытому всюду плотному в МП множеству является нигде не плотным в этом МП.

(*г*) Докажите, что конечное объединение нигде не плотных в МП множеств является нигде не плотным множеством в этом МП. Покажите, что утверждение теряет силу для объединения счётного семейства нигде не плотных множеств.

(*д*) Покажите, что множество первой категории в МП может быть всюду плотным множеством в этом МП.

(*е*) Докажите. что объединение счётного семейства множеств первой категории в МП есть снова множество первой категории в этом МП.

(*ж*) Приведите пример счётного семейства попарно не пересекающихся всюду плотных в МП множеств. Существуют ли несчётные семейства с такими свойствами?

1.6.6*. (Канторов дисконтинуум.) Пусть $(\mathbb{R},\rho)$ – МП с естественной метрикой и пусть C – множество тех точек отрезка $[0,1]$, которые в троичной системе счисления допускают представление в виде бесконечной дроби, не содержащей единицы среди своих цифр.

(*а*) Дайте описание геометрической структуры множества C, то есть дайте описание построения C путём последовательного удаления из $[0,1]$ сначала интервала, содержащего числа с обязательной единицей на первой позиции после запятой в троичной записи, затем интервалов, состоящих из чисел с обязательной единицей на второй позиции, но с нулём или двойкой на первой позиции, и т.д.

Докажите, что:

(*б*) C – замкнутое множество, и, более того, оно совершенно, то есть $C' = C$; (*в*) C – нигде не плотное множество на прямой; (*г*) C – множество мощности континуума.

1.6.7*. Пусть $(\mathbb{R},\rho)$ – МП с естественной метрикой. Докажите, что множествами второй категории в этом МП являются:

(*а*) $\mathbb{R}$; (*б*) любой невырожденный (т.е. с непустой внутренностью) промежуток; (*в*) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; (*г*) дополнение любого множества первой категории.

Докажите, что всюду плотными в этом МП являются:

(*д*) дополнение любого множества первой категории;

(е) пересечение любого счётного семейства открытых всюду плотных множеств в этом МП.

1.6.8. Докажите, что сепарабельными являются следующие МП:

(*а*) $(\mathbb{R},\rho)$, где ρ – естественная метрика; (*б*) $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, $0<p\le\infty$, (см. упр.1.1.5);

(*в*)* $(\mathbf{C}[a,b],\rho_p)$, $0<p\le\infty$, (см. упр.1.1.6); (*г*)* (l_p,ρ_p), $0<p<\infty$, (см. упр.1.1.7);

(*д*)* $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$, $1\le p<\infty$, (см.упр.1.1.8); (*е*)* (s,ρ_s) (см. упр.1.1.7(*е*)).

Докажите, что несепарабельными являются следующие МП:

(*ж*) (X,ρ), где X – несчётное множество и ρ – дискретная метрика; (*з*)* (l_∞,ρ_∞) (см. упр.1.1.7(*а*)).

Докажите, что, хотя МП (l_∞,ρ_∞) несепарабельно, следующие его классические подпространства являются сепарабельными:

(*и*)* (c,ρ_c), где $c=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \exists a\in\mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\}$, ρ_c – метрика, индуцированная на c метрикой ρ_∞; (МП сходящихся последовательностей.)

(*к*)* (c_0,ρ_{c_0}), где $c_0=\{x=\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$, ρ_{c_0} – метрика, индуцированная на c_0 метрикой ρ_∞. (МП бесконечно малых последовательностей.)

1.6.9*. Пусть (X,ρ) – сепарабельное МП. Докажите, что:

(*а*) любое подпространство МП (X,ρ) сепарабельно;

(*б*) любое множество $A\subset X$, все точки которого изолированы, не более чем счётно.

(*в*) Покажите, что требование сепарабельности (X,ρ) в утверждении (*б*) существенно.

§ 1.7. Полные МП.

Понятие полного МП, введённое в 1906 году М. Фреше, является одним из важнейших понятий математического анализа. В его основе лежит обобщённый аналог свойства полноты множества действительных чисел, на которое существенно опирается теория пределов, а, следовательно, и классическое дифференциальное и интегральное исчисление действительных функций одной действительной переменной. Как известно, свойство полноты множества $\mathbb{R}$ может быть сформулировано в различных эквивалентных формах. ([1], с.82.) При этом, чаще всего, при построении теории какое-то из этих утверждений аксиоматизируется, а все остальные становятся теоремами, хотя в силу исторических причин за каждым из них сохраняется своё традиционное название. Такими утверждениями являются:

(*а*) теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у непустого ограниченного сверху (снизу) числового множества;

(*б*) лемма Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки у бесконечного ограниченного числового множества;

(*в*) принцип Коши-Кантора о непустоте пересечения стягивающейся системы вложенных отрезков;

(*г*) лемма Гейне-Бореля-Лебега о существовании конечного подпокрытия у произвольного открытого покрытия ограниченного замкнутого числового множества;

(*д*) критерий Коши существования конечного предела числовой последовательности.

Наиболее удобным для обобщения оказалось последнее утверждение, положенное в основу определения полного МП.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется фундаментальной последовательностью, или последовательностью Коши, в МП (X,ρ), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon\ \forall m>N_\varepsilon : \rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Определение. МП (X,ρ) называется полным, если любая фундаментальная в (X,ρ) последовательность является сходящейся последовательностью в (X,ρ).

Легко проверяется (упр.1.7.1), что всякая сходящаяся в произвольном МП последовательность фундаментальна в этом МП. Таким образом, полное МП – это МП, в котором справедлив критерий Коши.

Как отмечалось выше, именно строгое построение теории действительных чисел, осуществлённое во второй половине XIX века различными способами и независимо друг от друга разными математиками позволило построить математический анализ на прочном фундаменте и освободило его от наивной геометрической интуиции и механических соображений. Один из подходов при таком построении, впервые предложенный независимо немецким математиком Г. Кантором (G. Cantor) и французским математиком Ш. Мерэ (Ch. Méray), говоря современным языком, фактически состоял в создании конкретной процедуры перехода от неполного МП $\mathbb{Q}$ к полному МП $\mathbb{R}$, причём включение $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ трактуется не буквально, а посредством отождествления $\mathbb{Q}$ с некоторым всюду плотным подмножеством в $\mathbb{R}$. Замечательно то, что, как впоследствии установил немецкий математик Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff), эта конструкция применима и к произвольному МП, что позволяет в случае неполного МП строить для него так называемое пополнение.

Переходим к строгим формулировкам.

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП и $f: X\to Y$. Отображение f называется изометрическим, или, коротко, изометрией, если

$$\forall x_1\in X\ \forall x_2\in X : \rho_Y(f(x_1),f(x_2)) = \rho_X(x_1,x_2).$$

Если, кроме того, изометрия f является биекцией X на Y, то МП (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) называются изометрически эквивалентными.

Замечание. Легко проверяется, что в произвольном семействе метрических пространств изометрическая эквивалентность является отношением эквивалентности. При этом какое-либо утверждение, сформулированное в терминах теории множеств и метрики и справедливое в одном МП, автоматически верно в любом другом изометрически эквивалентном ему МП. По этой причине часто при тех или иных рассмотрениях, когда изучаются лишь свойства МП, а не их конкретная природа, изометрически эквивалентные МП не различают, или, как говорят в таких случаях, отождествляют. Так, например, МП (Y,ρ_Y) часто называют подпространством МП (X,ρ_X), имея в виду не буквальное включение $Y\subset X$ и метрику ρ_Y,

индуцированную метрикой ρ_X, а наличие в МП (X,ρ_X) подпространства (Z,ρ_Z), которое изометрически эквивалентно (Y,ρ_Y). Именно в этом смысле следует понимать утверждение о том, что МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_p)$ из упр.1.1.6 является подпространством МП $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$ из упр.1.1.8. (Проверьте справедливость этого утверждения!)

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Метрическое пространство $(\hat{X},\hat{\rho})$ называется пополнением МП (X,ρ), если выполнены следующие условия:

1) $(\hat{X},\hat{\rho})$ – полное МП; 2) существует подпространство (Y,ρ_Y) в МП $(\hat{X},\hat{\rho})$, которое изометрически эквивалентно МП (X,ρ); 3) Y всюду плотно в МП $(\hat{X},\hat{\rho})$.

Ясно, что пополнением $(\hat{X},\hat{\rho})$ полного МП (X,ρ) тривиально может служить само МП (X,ρ), при этом в качестве Y можно взять $X=\hat{X}$.

Замечание. Как уже отмечалось выше, с точностью до изометрической эквивалентности МП (X,ρ) можно считать подпространством своего пополнения $(\hat{X},\hat{\rho})$.

Теперь мы можем сформулировать уже упоминавшийся принципиально важный результат Хаусдорфа.

Теорема Хаусдорфа о пополнении. ([2], с.36; [4], с.107; [7], с.225; [8], с.69; [10], с.35-39.) У любого МП существует пополнение, которое единственно с точностью до изометрической эквивалентности.

Оказывается, что переформулированный в обобщённой форме принцип Коши-Кантора для стягивающейся системы вложенных отрезков может быть использован в качестве критерия полноты произвольного МП.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Последовательность замкнутых шаров $\{K_{r_n}(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ в этом МП называют стягивающейся системой вложенных замкнутых шаров, если:

1) $\forall n\in\mathbb{N}: K_{r_n}(a_n)\supset K_{r_{n+1}}(a_{n+1})$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$.

Принцип вложенных шаров. ([4], с.103-105; [8], с.67.) МП является полным тогда и только тогда, когда любая стягивающаяся система вложенных замкнутых шаров имеет непустое пересечение.

Замечание. Критерий полноты МП сохраняет силу, если вместо систем шаров $\{K_{r_n}(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривать системы замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{diam} F_n)=0$. ([7], с.229.)

Ещё одно важное свойство полных МП выражается следующей теоремой. (Ср. с упр.1.6.7.)

Теорема Бэра о категории. ([4], с.105-106; [8], с.69; [10], с.41.) Полное МП является множеством второй категории.

В заключение сформулируем одно замечательное утверждение, существенно использующее полноту МП и широко применяемое в различных областях математики. Для этого нам понадобятся определения ещё некоторых понятий.

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП и $f:X\to Y$. Говорят, что отображение f удовлетворяет условию Липшица, если

$$\exists L\ge 0\,\forall x_1\in X\,\forall x_2\in X:\rho_Y(f(x_1),f(x_2))\le L\,\rho_X(x_1,x_2),$$

при этом число L называют константой Липшица. Если $L\le 1$, то f называется сжимающим отображением, или, коротко, сжатием. Если при всех $x_1\ne x_2$ выполняется неравенство $\rho_1(f(x_1),f(x_2))<\rho_X(x_1,x_2)$, то f называется строгим сжатием.

Замечания. 1) Если отображение удовлетворяет условию Липшица, то у него существует наименьшая константа Липшица L_0, причём $L_0=0$ тогда и только тогда, когда отображение является постоянным. (Докажите это утверждение!) Отметим также, что для строгого сжатия

необязательно существует строго меньшая единицы константа Липшица. (Приведите соответствующий пример!)

2) Широко распространена терминология, согласно которой сжимающими называют только липшицевы отображения со строго меньшей единицы константой Липшица. Мы предпочитаем придерживаться более точной терминологии.

Изометрию можно рассматривать как частный случай сжатия, но она не является строгим сжатием.

Определение. Пусть X – непустое множество и $f:X\to X$. (В этом случае говорят, что f действует из множества X в себя.) Элемент $a\in X$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f(a)=a$.

Отметим, что не всякое отображение множества X в себя имеет неподвижную точку, а, с другой стороны, существуют отображения с любым наперёд заданным числом неподвижных точек, в частности, неподвижными могут оказаться все точки множества X. (Приведите соответствующие примеры!) Вопрос о существовании неподвижных точек отображений множеств в себя является исключительно важным в различных исследованиях. Достаточное условие существования и единственности такой точки даёт следующее утверждение, доказанное в 1922 году польским математиком С. Банахом (S. Banach).

Теорема Банаха о неподвижной точке. (Принцип сжимающих отображений.) ([2], с.44-45; [8], с.72-73.) Липшицево отображение полного МП в себя со строго меньшей единицы константой Липшица имеет единственную неподвижную точку.

Замечания. 1) Отметим, что доказательство теоремы Банаха ([6], с.40; [10], с.42; [13], с.108.) не только гарантирует существование неподвижной точки, но и предлагает конструктивный процесс построения сколь угодно близких последовательных приближений этой точки. Для этого в рассматриваемом полном МП (X,ρ) выбирается произвольная точка $x_0\in X$ и с помощью рассматриваемого отображения $f:X\to X$ строится последовательность итераций $x_n=f(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда для неподвижной точки $a\in X$ отображения f имеем: $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2) Отметим также. что полнота МП в теореме Банаха используется только для доказательства существования неподвижной точки. Если из других соображений существование неподвижной точки известно, то доказательство её единственности и построение последовательных приближений в неполном МП ничем не отличаются от случая полного МП.

3) Наиболее известны применения теоремы Банаха для доказательства теорем существования и единственности решений систем линейных алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений, а также для доказательства теоремы о неявной функции. ([8], с.74-82; [10], с.43-46; [13], с.294-297; [15], с.117-122.)

Упражнения. 1.7.1. Пусть (X,ρ) – МП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$. Докажите следующие утверждения:

(*а*) если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальна;

(*б*) если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то она ограничена;

(*в*) если фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся к $a\in X$ подпоследовательность, то она сходится к точке a.

1.7.2. Пусть (X,ρ) – МП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$. Докажите следующие утверждения:

(*а*) $((\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ фундаментальна})\wedge(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ фундаментальна}))\Rightarrow(\exists\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\in\mathbb{R})$;

(*б*) $((\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ фундаментальна})\wedge(\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0))\Rightarrow(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ фундаментальна})$;

(*в*) $((\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a)\wedge(\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0))\Rightarrow(\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a)$.

1.7.3. Пусть ρ_1 и ρ_2 – две эквивалентные метрики на множестве X и МП (X,ρ_1) полно.

(*а*) Верно ли, что МП (X,ρ_2) тоже полно? Рассмотрите на $\mathbb{R}$ естественную метрику и угловую метрику из упр.1.1.11(*а*).

(*б*) Ответьте на тот же вопрос, если метрики ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют более сильному требованию:

$$\exists\varepsilon_0>0\,\exists c>0\,\exists C>0\,\forall x\in X\,\forall y\in\in X:(\rho_1(x,y)<\varepsilon_0)\Rightarrow(c\rho_1(x,y)\le\rho_2(x,y)\le C\rho_1(x,y)).$$

Проверьте, что этому условию удовлетворяют на $\mathbb{R}$ естественная метрика и угловая метрика из упр.1.1.11(*б*). Получите отсюда полноту МП, порождаемого этой угловой метрикой.

1.7.4. (*а*) Пусть (X,ρ) – полное МП. Докажите, что подпространство (Y,ρ_Y) пространства (X,ρ) является полным МП в том и только в том случае, если Y – замкнутое множество в МП (X,ρ).

(*б*) Канторово множество (упр.1.6.6) замкнуто в МП $\mathbb{R}$ с естественной метрикой, и, следовательно, согласно (*а*) представляет собой полное МП с индуцированной метрикой. В то же время, оно нигде не плотно. Не противоречит ли это теореме Бэра?

1.7.5. Докажите полноту следующих МП:

(*а*) $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, $0<p\le\infty$, (упр.1.1.5); (*б*)* $(\mathbf{C}[a,b],\rho_\infty)$ (упр.1.1.6(*а*)); (*в*)* (l_p,ρ_p), $0<p\le\infty$, (упр.1.1.7(*а*)-(*д*)); (*г*)* (s,ρ_s) (упр.1.1.7(*е*)); (*д*)* (c,ρ_c) (упр.1.6.8(*и*)). (*е*)* (c_0,ρ_{c_0}) (упр.1.6.8(*к*)).

(*ж*)* Докажите, что МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_p)$, $0<p<\infty$, являются неполными.

Замечание. Можно показать, что не только МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_p)$, $0<p<\infty$, но и более широкие МП $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$, $0<p<\infty$, (упр.1.1.8) являются неполными. Одна из конструкций пополнений этих пространств традиционно осуществляется в функциональном анализе посредством использования уже упоминавшихся измеримых функций и интеграла Лебега, являющегося обобщением интеграла Римана. Эти пополнения обозначаются $(L^p[a,b],\rho_p)$, $0<p<\infty$, и называются пространствами Лебега.

1.7.6*. Докажите, что МП (B,ρ_B) из упр.1.1.10 является полным тогда и только тогда, когда является полным МП (Y,ρ_Y). В частности, полным является МП ограниченных числовых функций на непустом множестве X с равномерной метрикой (упр.1.1.9).

1.7.7. Пусть $(\mathbb{R},\rho)$ – МП, где ρ – угловая метрика из упр.1.1.11(*а*).

(*а*) Продолжите метрику ρ до метрики $\hat\rho$ на расширенном множестве вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ так, чтобы МП $(\overline{\mathbb{R}},\hat\rho)$ являлось пополнением МП $(\mathbb{R},\rho)$.

(*б*) Докажите, что пополнением МП $(\mathbb{R},\rho)$ является также МП $([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\widetilde\rho)$. где $\widetilde\rho$ – метрика, индуцированная на $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ естественной метрикой на вещественной оси.

1.7.8. Покажите, что в принципе вложенных шаров существенны условия полноты МП, замкнутости шаров и их последовательного вложения друг в друга.

1.7.9*. Приведите пример полного МП и последовательности вложенных замкнутых шаров в нём, не имеющих общей точки. (Тем самым будет показано, что требование стягиваемости системы замкнутых шаров в принципе вложенных шаров существенно.)

1.7.10*. Докажите, что в МП $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, $0<p\le\infty$, (упр.1.1.5) условие сходимости всякой фундаментальной последовательности является эквивалентным следующему утверждению: у всякой ограниченной последовательности точек существует сходящаяся подпоследовательность. (Лемма Больцано-Вейерштрасса.)

1.7.11. Докажите, что если полное МП представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств, то по меньшей мере одно из них содержит целиком некоторый шар этого пространства.

1.7.12. Пусть (X,ρ) – полное МП. Докажите, что множествами второй категории в этом МП являются:

(*а*) любое подмножество в X с непустой внутренностью; (*б*) дополнение любого множества первой категории.

Докажите, что всюду плотными в этом МП являются:

(*в*) дополнение любого множества первой категории; (*г*) пересечение любого счётного семейства открытых всюду плотных множеств. (Ср. с упр.1.6.7.)

1.7.13*. Пусть (X,ρ) – полное МП без изолированных точек. Докажите, что X несчётно.

1.7.14. Пусть (X,ρ) – МП, $f:X\to X$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой $L<1$, $a\in X$ – неподвижная точка отображения f и $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ – некоторая последовательность итераций, построенных с помощью отображения f (см. замечания к теореме Банаха). Докажите, что погрешность n-го приближения x_n неподвижной точки a допускает следующую оценку сверху посредством геометрической прогрессии:

$$\rho(x_n,a)\le\frac{L^n}{1-L}\rho(x_1,x_0).$$

1.7.15. (*а*) Покажите, что строгое сжатие полного МП в себя не обязательно имеет неподвижную точку. (Отсюда, в частности, следует существенность требования $L<1$ для константы Липшица в теореме Банаха.)

(*б*) Покажите существенность остальных условий теоремы Банаха.

1.7.16. Докажите, что для отображения $\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}]\ni x\xrightarrow{f}y\in\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}]$, где $x=x(t)\in\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}]$, а $y=y(t)$ – функция, сопоставленная функции $x(t)$ посредством формулы

$$y(t)=1+\int_0^t x(u)\,du,$$

(*а*) имеет место включение $f(K_1(1))\subset K_1(1)$, где $K_1(1)$ – замкнутый шар единичного радиуса с центром в точке $a=a(t)\equiv1$ в метрическом пространстве $(\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}],\rho_\infty)$;

(*б*) согласно теореме Банаха существует единственная в $K_1(1)$ неподвижная точка x_0 отображения f.

Найдите эту точку, непосредственной проверкой убедитесь в её неподвижности и справедливости включения $x_0\in K_1(1)$.

1.7.17. Пусть (X,ρ) – полное МП, $f:X\to X$, $g:X\to X$, причём отображение f удовлетворяет условию Липшица со строго меньшей единицы константой. Если $f\circ g=g\circ f$, то неподвижная точка отображения f является неподвижной и для отображения g. Покажите, что при этом g может иметь другие неподвижные точки.

1.7.18. Пусть (X,ρ) – полное МП и $f:K_r(a)\to X$ – отображение замкнутого шара $K_r(a)\subset X$ в пространство X, удовлетворяющее при некотором $L\in[0,1)$ условиям:

1) $\forall x_1\in K_r(a)\forall x_2\in K_r(a):\rho(f(x_1),f(x_2))\le L\,\rho(x_1,x_2)$; 2) $\rho(f(a),a))\le(1-L)r$.

Докажите, что отображение f имеет единственную неподвижную точку в шаре $K_r(a)$.

1.7.19. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая на $[a,b]$ функция, отображающая отрезок $[a,b]$ в себя и удовлетворяющая условию: $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|<1$. Докажите, что f имеет единственную неподвижную точку.

1.7.20. Пусть $f(x) \in \mathbf{C}[a,b]$ и $f([a,b]) \subset [a,b]$. Тогда f имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Замечание. Упр.1.7.20 является частным случаем ещё одной замечательной теоремы о неподвижной точке, доказанной в 1910 году голландским математиком Л. Брауэром (L. Brouwer).

Теорема Брауэра о неподвижной точке. (См. [2], с.240; [10], с.263-265; [17], с.506-508; [20], с.602-611.) Непрерывное отображение замкнутого евклидова шара пространства $\mathbb{R}^n$ в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

§ 1.8. Компактные МП.

Хорошо известна важная роль, которую играют в классическом анализе теоремы Вейерштрасса и Кантора о свойствах непрерывных на отрезке функций. Анализ их доказательств показывает, что ключевым является свойство отрезка, выражаемое леммой Гейне-Бореля-Лебега или любым другим эквивалентным ей утверждением. Обобщение этого свойства приводит к особо важному классу так называемых компактных МП, в наиболее общей форме введённому в 1923 году московскими математиками П.С. Александровым и П.С. Урысоном.

Определение. Пусть X – множество и $Y \subset X$. Семейство $\mathfrak{A}=\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ подмножеств множества X называется покрытием множества Y, если $Y \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. ($\mathfrak{A}$ – готический вариант написания буквы A.) Если подсемейство $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ тоже является покрытием множества Y, то $\mathfrak{A}_1$ называется подпокрытием покрытия $\mathfrak{A}$. Если (X,ρ) – МП и все множества A_γ открытые (замкнутые), то покрытие $\mathfrak{A}$ называется открытым (замкнутым).

Определение. МП (X,ρ) называется компактным, если у всякого открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K \subset X$ называется компактным множеством, или компактом, в МП (X,ρ), если подпространство (K,ρ_K) является компактным МП.

Очевидно (см упр.1.5.11), что множество $K \subset X$ является компактом в МП (X,ρ) тогда и только тогда, когда у всякого открытого в топологии $\mathfrak{G}_\rho(X)$ покрытия множества K существует конечное подпокрытие.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K \subset X$ называется относительно компактным в МП (X,ρ), если $\overline{K}$ является компактом в этом МП.

Ясно, что для замкнутых множеств (в частности, для всего пространства) понятия компактности и относительной компактности совпадают.

Определение. МП (X,ρ) называется предкомпактным, если его пополнение является компактным МП.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K \subset X$ называется предкомпактным множеством в МП (X,ρ), если подпространство (K,ρ_K) является предкомпактным МП.

В полном МП понятия относительной компактности и предкомпактности совпадают (упр.1.7.4).

Замечание. Возвращаясь к уже упоминавшейся выше проблеме единой терминологии, отметим, что сформулированное выше понятие компактного МП было введено П.С. Александровым и П.С. Урысоном в более общем случае ТП под названием бикомпактное ТП, чтобы отличать его от уже существовавшего в то время более слабого понятия компактного ТП, введённого М. Фреше. (Этот вид компактности сейчас называется счётной компактностью. См. [7], с.238; [8], с.98-99; [19], с.55; [20], с.304; [21], с.235-236.) С другой стороны, в русскоязычной литературе в случае МП вместо термина "относительно компактное множество" часто употреблялся термин "компактное множество", а вместо введённого выше термина "компактное множество" использовался термин "компактное в себе множество ", причём определения давались посредством аксиоматизации свойств, выражаемых леммой Больцано-Вейерштрасса, а не леммой Гейне-Бореля-Лебега. (Этот вид компактности теперь называется секвенциальной компактностью. (См.[7], с.188; [20], с.314; [21], с.237-238.) При этом оказалось, что в МП (но не в ТП!) понятия бикомпактности, счётной компактности и секвенциальной компактности совпадают.(См. ниже критерий Больцано-Вейерштрасса и упр.1.8.12.) Всё это не согласовывалось с общеупотребительной зарубежной терминологией и создавало сложности при пользовании литературой. По этим причинам, а также с учётом того, что нас интересует только случай МП, мы не употребляем термин "бикомпактность". Отметим также, что компакты в МП называют метрическими компактами, чтобы отличать их от компактов в более общем случае ТП, где имеют место уже не все свойства метрических компактов.

Несложно проверяется, что на прямой $\mathbb{R}$ с естественной метрикой семейство компактов состоит из тех и только тех множеств, которые являются ограниченными и замкнутыми. (Проверьте это!) Оказывается, что в общем случае эти свойства являются уже только необходимыми (см. упр.1.8.4(*б*)), но не достаточными для компактности. Поэтому для формулировки аналогичного критерия компактности нам понадобятся новые понятия.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП, $Y \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset X$ называется ε-сетью для множества Y, если $Y \subset \bigcup_{a\in A} U_\varepsilon(a)$. Если при этом A конечно, то A называется конечной ε-сетью для множества Y.

Ясно, что A является ε-сетью для Y в том и только в том случае, если множество Y содержится в ε-окрестности множества A (упр.1.5.8(*а*)).

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $Y \subset X$ называется вполне ограниченным множеством в МП (X,ρ), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для Y.

Другими словами, Y называется вполне ограниченным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества Y шарами радиуса ε.

Отметим, что вполне ограниченное множество ограничено, но обратное утверждение неверно (см., например, упр.1.8.7).

Теперь можно сформулировать критерии компактности в полных МП.

Критерий Хаусдорфа компактности множества в полном МП. ([4], с.114-118; [7], с.230-231; [8], с.104-105.) Пусть (X,ρ) – полное МП. Множество $K \subset X$ является компактом в МП (X,ρ) в том и только в том случае, если оно вполне ограничено и замкнуто.

Частным случаем этого утверждения является следующее: полное МП является компактным тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

Очевидно, что критерий Хаусдорфа переформулируется на случай относительно компактных множеств следующим образом. (Дайте соответствующую аргументацию!)

Теорема. Пусть (X,ρ) – полное МП. Множество $K \subset X$ является относительно компактным в МП (X,ρ) в том и только в том случае, если оно вполне ограничено.

Замечание. В случае неполных МП условия компактности (отностительной компактности) в перечисленных вариантах критерия Хаусдорфа остаются необходимыми, но перестают быть достаточными. (Покажите это!)

В случае произвольного МП критерий Хаусдорфа легко переформулируется для компактных и предкомпактных множеств следующим образом. (Дайте соответствующую аргументацию!)

Теорема. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K \subset X$ является компактом в МП (X,ρ) в том и только в том случае, если оно вполне ограничено и МП (K,ρ_K) является полным.

Теорема. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K \subset X$ является предкомпактным в МП (X,ρ) в том и только в том случае, если оно вполне ограничено.

Как уже отмечалось выше, понятие метрического компакта можно переформулировать в терминах последовательностей, что отражено в следующем критерии. (С исторической точки

зрения справедливо назвать его критерием Больцано-Вейерштрасса, хотя в общей форме он доказан совместными усилиями Фреше и Хаусдорфа.)

Критерий Больцано-Вейерштрасса компактности множества в МП. ([2], с.27-28; [6], с.27-33; [13], с.76-77.) Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K\subset X$ является компактом в МП (X,ρ) в том и только в том случае, если у всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к некоторой точке $a\in K$.

Частным случаем этого утверждения является следующее: МП является компактным тогда и только тогда, когда у всякой последовательности точек в этом пространстве существует сходящаяся подпоследовательность.

Переформулируем критерий Больцано-Вейерштрасса для относительно компактных и предкомпактных множеств. (Дайте соответствующую аргументацию!)

Теорема. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K\subset X$ является относительно компактным в МП (X,ρ) в том и только в том случае, если у всякой последовательности точек из множества K существует сходящаяся подпоследовательность.

Теорема. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $K\subset X$ является предкомпактным в МП (X,ρ) в том и только том случае, если у всякой последовательности точек из множества K существует фундаментальная подпоследовательность.

Задача описания семейства компактных множеств в МП является одной из наиболее важных проблем в теории МП. Приведём в заключение формулировки критериев относительной компактности для некоторых из уже рассмотренных МП. (См. также упр.2.4.7.)

Для формулировки критерия относительной компактности в МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_\infty)$, доказанного итальянскими математиками Ч. Арцела (C. Arzelá) и Дж. Асколи (G. Ascoli), нам понадобятся ещё некоторые понятия.

Определение. Семейство числовых функций $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$, определённых на числовом множестве $X\subset\mathbb{R}$, называется равностепенно непрерывным на X, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta_\varepsilon>0\,\forall\alpha\in A\,\forall t'\in[a,b]\,\forall t''\in[a,b]:(|t'-t''|<\delta_\varepsilon)\Rightarrow(|x_\alpha(t')-x_\alpha(t'')|<\varepsilon).$$

Семейство числовых функций $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$, определённых на произвольном множестве X, называется равномерно ограниченным на X, если $\exists M>0\,\forall\alpha\in A\,\forall t\in[a,b]:|x_\alpha(t)|\le M$.

Отметим, что равномерная ограниченность на X семейства числовых функций есть ограниченность этого семейства в МП (B,ρ_B) из упр.1.1.9. (Проверьте это!)

Теорема Арцела-Асколи. ([2], с.391-393; [6], с.34-36; [8], с.105-108.) Для того чтобы семейство $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}\subset\mathbf{C}[a,b]$ являлось относительно компактным в МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на $[a,b]$.

Критерий относительной компактности в МП $(l_p,\rho_p), 1\le p<\infty$. ([10], с.77.) Для того чтобы множество $K=\{x^{(\alpha)}=\{x_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^{\infty}\in l_p\mid\alpha\in A\}$ являлось относительно компактным в МП (l_p,ρ_p), $1\le p<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы K было ограниченным в этом МП и последовательность остатков $r_m^{(\alpha)}=\sum\limits_{n=m}^{\infty}|x_n^{(\alpha)}|^p$ удовлетворяла условию: $r_m^{(\alpha)}\rightrightarrows 0$ на A при $m\to\infty$.

Замечание. Условие на остатки в последней теореме означает равномерное относительно параметра $\alpha\in A$ стремление к нулю последовательности $r_m^{(\alpha)}$ при $m\to\infty$, то есть:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists M_\varepsilon\in\mathbb{N}\,\forall m>M_\varepsilon\,\forall\alpha\in A:|r_m^{(\alpha)}|<\varepsilon.$$

Критерий относительной компактности в МП (s,ρ_s). Для того чтобы множество $K=\{x^{(\alpha)}=\{x_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^{\infty}\in s\mid\alpha\in A\}$ являлось относительно компактным в МП (s,ρ_s), необходимо и достаточно, чтобы K было покоординатно ограничено, то есть:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,\exists M_n>0\,\forall\alpha\in A:|x_n^{(\alpha)}|\le M_n.$$

(Докажите этот критерий самостоятельно!)

Упражнения. 1.8.1. Семейство подмножеств некоторого множества называется центрированным, если любое конечное подсемейство этого семейства имеет непустое пересечение. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) МП (X,ρ) компактно;

(*б*) любое семейство замкнутых в МП (X,ρ) множеств с пустым пересечением содержит конечное подсемейство с пустым пересечением;

(*в*) любое центрированное семейство замкнутых в МП (X,ρ) множеств имеет пустое пересечение.

1.8.2. Пусть $(\mathbb{R},\rho)$ – МП, где ρ – естественная метрика.

(*а*) Докажите, что в этом МП являются компактными следующие числовые множества:
1) $\varnothing$; 2) конечное множество; 3) $[a,b]$; 4) $[0,1]\cup\{2\}$; 5) канторов дисконтинуум (упр. 1.6.6).

(*б*) Докажите, что в этом МП не являются компактными следующие числовые множества:

1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{N}$;3) $[a,+\infty)$; 4) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; 5) $[a,b)$; 6) $[0,1)\cup(1,2]$; 7) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$;

(*в*) Какие из множеств пункта (*б*) являются относительно компактными в этом МП?

(*г*) Пусть $((0,+\infty),\rho)$ – МП, где ρ – метрика, индуцированная естественной метрикой на $\mathbb{R}$. Какие из следующих числовых множеств:

1) $(1,2]$; 2) $(0,1]$; 3) $\mathbb{Q}\cap(2,3)$; 4) $(0,2]\backslash\mathbb{Q}$; 5) $(0,+\infty)$

являются относительно компактными в этом МП? Предкомпактными в этом МП?

1.8.3. Дайте описание компактных, относительно компактных и предкомпактных множеств в дискретном МП (упр.1.1.4).

1.8.4. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите следующие свойства компактов:

(*а*) Пусть $K\subset Y\subset X$. Множество K является компактом в подпространстве (Y,ρ_Y) тогда и только тогда, когда K – компакт в МП (X,ρ). (Иными словами, компактность множества (в отличие от замкнутости!) не зависит от выбора объемлющего его МП, если метрики этих МП согласованы, то есть когда одно из них есть подпространство другого.)

(*б*) Если K – компакт в МП (X,ρ), то K ограниченное и замкнутое множество в этом МП. Приведите пример МП и ограниченного замкнутого множества в нём, которое не является компактом в этом МП.

(*в*) Если K – компакт в МП (X,ρ), $F\subset K$ и $F\in\mathfrak{F}_\rho(X)$, то F – компакт в МП (X,ρ).

(*г*) Если $\{K_1,K_2,\ldots,K_n\}$ – конечное семейство компактов МП (X,ρ), то $\bigcup\limits_{i=1}^{n}K_i$ – компакт в МП (X,ρ). Покажите, что для счётного семейства компактов утверждение неверно.

(*д*) Если $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – произвольное семейство компактов в МП (X,ρ), то $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}K_\gamma$ – компакт в МП (X,ρ).

(*е*) Пусть $(X_i,\rho_i)(i=1,2)$ – МП, $X=X_1\times X_2$ и (X,ρ) – декартово произведение МП (X_1,ρ_1) и (X_2,ρ_2) (см. упр.1.3.12(*а*)). Если K_i – компакт в МП $(X_i,\rho_i)(i=1,2)$, то $K=K_1\times K_2$ – компакт в МП (X,ρ).

(*ж*) Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система вложенных компактов в МП (X,ρ), то есть при всех $n\in\mathbb{N}$ имеет место включение $K_n\supset K_{n+1}$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n\neq\varnothing$. (Ср. с упр.1.7.9.)

1.8.5. Докажите, что компактное МП полно. Покажите, что обратное утверждение неверно.

1.8.6. Докажите следующий критерий некомпактности МП: для того чтобы МП (X,ρ) не являлось компактным МП, достаточно, а в случае полного МП и необходимо, чтобы в МП существовала "растопыренная" последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то есть такая, что $\inf\limits_{n\neq m}\rho(x_n,x_m)>0$, или подробнее:

$$\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall m\in\mathbb{N}\colon (n\neq m)\Rightarrow(\rho(x_n,x_m)>\varepsilon).$$

1.8.7. Пусть (X,ρ) – МП из упр.1.2.7(*д*) и пусть

$$K=\{x=(x_1,x_2):(-1\le x_1\le 1)\wedge(x_2=0)\},\qquad L=\{x=(x_1,x_2):(-1\le x_1\le 1)\wedge(x_2=1)\}.$$

Покажите, что множество K является компактом в МП (X,ρ), а множество L не является компактом в МП (X,ρ).

1.8.8. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите, что множество $Y\subset X$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение множества Y на конечное число частей диаметра меньше ε.

1.8.9. Гильбертовым параллелепипедом ("кирпичом") в МП (l_2,ρ_2) (см. упр.1.1.7(*в*)) называется множество

$$K=\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2\mid\forall n\in\mathbb{N}\colon |x_n|\le\frac{1}{2^{n-1}}\}.$$

Докажите, что K – компакт в МП (l_2,ρ_2).

1.8.10. Докажите, что вполне ограниченное МП сепарабельно. Покажите, что обратное утверждение неверно.

1.8.11*. Докажите, что некомпактным является любой замкнутый шар в следующих МП: (*а*) $(\mathbf{C}[a,b],\rho_\infty)$ (см. упр.1.1.6(*а*)); (*б*) (l_p,ρ_p), $0<p\le\infty$, (см. упр.1.1.7).

1.8.12. Докажите, что критерий Больцано-Вейерштрасса может быть сформулирован в следующей равносильной форме: МП является компактным тогда и только тогда, когда у всякого бесконечного множества точек в этом пространстве существует предельная точка.

1.8.13*. МП называется счётно-компактным, если у всякого счётного открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие. Докажите, что счётная компактность МП равносильна его компактности.

1.8.14. (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.) Докажите следующие критерии компактности и относительной компактности в МП $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, $0<p\le\infty$:

(*а*) для того чтобы множество $K\subset\mathbb{R}^n$ являлось компактом в МП $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, необходимо и достаточно, чтобы K было ограниченным и замкнутым;

(*б*) для того чтобы множество $K\subset\mathbb{R}^n$ являлось относительно компактным в МП $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, необходимо и достаточно, чтобы K было ограниченным.

1.8.15. Докажите, что семейство липшицевых числовых функций, определённых на множестве $X\subset\mathbb{R}$ и имеющих общую константу Липшица, равностепенно непрерывно на X.

1.8.16*. Пользуясь теоремой Арцела-Асколи, проверьте, что семейство $\{\sin kt\mid k\in\mathbb{N}\}$ не является относительно компактным в МП $\mathbf{C}[0,\pi]$.

§ 1.9. Предел и непрерывность отображения в МП.

Как и для числовой функции числового аргумента понятия предела и непрерывности отображения, действующего из одного МП в другое МП, можно формулировать как в терминах окрестностей, так и в терминах последовательностей.

Определение (по Коши). Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $D\subset X$, $D\neq\varnothing$, $f:D\to Y$ и $a\in D'$. Точка $b\in Y$ называется пределом отображения f в точке a, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0\ \forall x\in D:(0<\rho_X(x,a)<\delta_\varepsilon)\Rightarrow(\rho_Y(f(x),b)<\varepsilon).$$

При этом используются привычные обозначения $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ или $f(x)\to b\ (x\to a)$.

Это определение равносильным образом переписывается в терминах ε-окрестностей или произвольных окрестностей:

$$(\lim_{x\to a}f(x)=b)\Leftrightarrow(\forall U_\varepsilon(b)\ \exists\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(a):f(\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(a)\cap D)\subset U_\varepsilon(b))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\forall U(b)\ \exists\overset{\circ}{U}(a):f(\overset{\circ}{U}(a)\cap D)\subset U(b)).$$

Определение (по Гейне). Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $D\subset X$, $D\neq\varnothing$, $f:D\to Y$ и $a\in D'$. Точка $b\in Y$ называется пределом отображения f в точке a, если

$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D\setminus\{a\}:(\lim_{n\to\infty}x_n=a)\Rightarrow(\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b).$$

Теорема. Определения по Коши и по Гейне предела отображения, действующего из одного МП в другое МП, эквивалентны. (Докажите это утверждение!)

Аналогично переносятся на общий случай определения непрерывности функции.

Определение (по Коши). Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $D\subset X$, $D\neq\varnothing$, $f:D\to Y$ и $a\in D$. Отображение f называется непрерывным в точке a, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0\ \forall x\in D:(\rho_X(x,a)<\delta_\varepsilon)\Rightarrow(\rho_Y(f(x),f(a))<\varepsilon).$$

В терминах ε-окрестностей или произвольных окрестностей определение непрерывности f в точке a может быть переписано в следующей форме:

$$(f\text{ непрерывно в точке }a)\Leftrightarrow(\forall U_\varepsilon(f(a))\ \exists U_{\delta_\varepsilon}(a):f(U_{\delta_\varepsilon}(a)\cap D)\subset U_\varepsilon(f(a)))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\forall U(f(a))\ \exists U(a):f(U(a)\cap D)\subset U(f(a))).$$

Определение (по Гейне). Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $D\subset X$, $D\neq\varnothing$, $f:D\to Y$ и $a\in D$. Отображение f называется непрерывным в точке a, если

$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D:(\lim_{n\to\infty}x_n=a)\Rightarrow(\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)).$$

Теорема. Определения по Коши и по Гейне непрерывности в точке отображения, действующего из одного МП в другое МП, эквивалентны. (Докажите это утверждение!)

Замечание. Отметим, что непрерывность отображения f в точке $a\in D$, являющейся предельной точкой области определения $(a\in D\cap D')$, имеет место в том и только в том случае, если существует предел f в точке a и при этом совпадает со значением f в точке a, то есть при выполнении условия: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Непрерывность же в точке $a\in D$, являющейся изолированной точкой области определения $(a\in D\setminus D')$, имеет место для отображения f всегда. (Дайте соответствующую аргументацию!)

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $f:X\to Y$ и $A\subset X$. Отображение f называется непрерывным на множестве A, если оно непрерывно в каждой точке множества A. Семейство непрерывных на X отображений из X в Y обозначается $C(X,Y)$, причём в случае $Y=\mathbb{R}$ с естественной метрикой используется упрощённое обозначение $C(X)$.

Отображение $f \in C(X,Y)$ называется гомеоморфизмом МП X на МП Y, если f биективно и обратное отображение f^{-1} непрерывно на Y, то есть $f^{-1} \in C(Y,X)$.

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $f: X \to Y$. Отображение f называется равномерно непрерывным на X, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0\, \forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X : (\rho_X(x_1,x_2) < \delta_\varepsilon) \Rightarrow (\rho_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon).$$

Из равномерной непрерывности на X отображения f вытекает его непрерывность на X, но обратное утверждение неверно. (Приведите соответствующий пример!)

Сформулируем обобщения некоторых классических теорем о свойствах непрерывных функций.

Теорема о непрерывном образе компакта. ([2], с.42; [4], с.158; [6], с.36.) Пусть $f \in C(X,Y)$, где (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, и K – компакт в МП (X,ρ_X). Тогда $f(K)$ – компакт в МП (Y,ρ_Y).

Следствиями этой теоремы с учётом свойств компактов в $\mathbb{R}$ с естественной метрикой являются следующие утверждения для непрерывных числовых функций, определённых на МП.

Обобщение первой теоремы Вейерштрасса. Пусть $f \in C(X)$, где (X,ρ_X) – МП, и K – компакт в МП (X,ρ_X). Тогда f ограничена на множестве K.

Обобщение второй теоремы Вейерштрасса. Пусть $f \in C(X)$, где (X,ρ_X) – МП, и K – компакт в МП (X,ρ_X). Тогда f достигает на K своих точных граней.

Теорема о непрерывности обратного отображения в МП. ([6], с.37.) Пусть $f \in C(X,Y)$ – инъективное отображение, где (X,ρ_X) – компактное МП и (Y,ρ_Y) – МП. Тогда $f^{-1} \in C(Z,X)$, где $Z = f(X)$ и (Z,ρ_Z) – подпространство МП (Y,ρ_Y).

Обобщение теоремы Кантора о равномерной непрерывности отображений в МП. ([2], с.43; [4]. с.159; [6], с.37.) Пусть $f \in C(X,Y)$, где (X,ρ_X) – компактное МП и (Y,ρ_Y) – МП. Тогда f равномерно непрерывно на X.

Упражнения. 1.9.1. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $D \subset X$, $D \neq \varnothing$, $f: D \to Y$ и $a \in D'$. Докажите следующие свойства предела отображения f:

(*а*) если у отображения f существует предел в точке a, то он единственный;

(*б*) если у отображения f существует предел в точке a, то f асимптотически ограничено при $x \to a$, то есть $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ такая, что $f(\overset{\circ}{U}(a) \cap D)$ – ограниченное множество в МП (Y,ρ_Y).

Арифметические свойства пределов и утверждения о предельном переходе в неравенствах для числовых функций формулируются в привычной форме.

1.9.2. Пусть (X,ρ_X) и $(\mathbb{R},\rho)$– МП, где ρ – естественная метрика, $D \subset X$, $D \neq \varnothing$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $h: D \to \mathbb{R}$, и $a \in D'$. Докажите следующие свойства предела функции:

(*а*) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Тогда $(\exists \lim(f(x) \pm g(x)) = b \pm c) \wedge (\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc)$, а если $c \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

(Корректность выражения $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $c \neq 0$ обеспечивается тем, что $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap D$: $g(x) \neq 0$, при этом множество $D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \subset D$ является областью определения функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $a \in D_1'$. Дайте соответствующую аргументацию!)

(*б*) Пусть $\exists \overset{\circ}{U}(a)\, \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap D : f(x) \le h(x) \le g(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

(*с*) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \overline{\mathbb{R}}$ и $b < c$. Тогда $\exists \overset{\circ}{U}(a) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap D$: $f(x) < g(x)$.

1.9.3. Пусть (X,ρ_X) и $(\mathbb{R},\rho)$– МП, где ρ – естественная метрика, $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ непрерывны в точке a, а при $g(a) \neq 0$ непрерывной в точке a является и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

1.9.4. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) и (Z,ρ_Z) – МП, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $a \in X$, $b = f(a) (\in Y)$. Докажите, что если f непрерывно в точке a, а g непрерывно в точке b, то композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.

1.9.5*. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $f: X \to Y$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) $f \in C(X,Y)$; (*б*) $\forall G \in \mathfrak{G}_{\rho_Y}(Y)$: $f^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_{\rho_X}(X)$; (*в*) $\forall U_\varepsilon(a) \subset Y : f^{-1}(U_\varepsilon(a)) \in \mathfrak{G}_{\rho_X}(X)$;

(*г*) $\forall F \in \mathfrak{F}_{\rho_Y}(Y)$: $f^{-1}(F) \in \mathfrak{F}_{\rho_X}(X)$; (*д*) $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; (*е*) $\forall B \subset Y : \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

1.9.6. Пусть (X,ρ) – МП, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, $a \in X$. Докажите справедливость следующих утверждений:

(*а*) $f \in C(X)$, где $f(x) = \rho(x,a)$; (*б*) $g \in C(X)$, где $g(x) = \rho(x,A)$.

1.9.7. Пусть (X,ρ_i) $(i = 1,2)$. Докажите, что метрика ρ_1 не слабее метрики ρ_2 тогда и только тогда, когда является непрерывным тождественное отображение $id: X \to X$ как отображение, действующее из МП (X,ρ_1) в МП (X,ρ_2). При этом метрики являются эквивалентными в том и только в том случае, если это отображение является гомеоморфизмом.

1.9.8. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите справедливость следующих утверждений:

(*а*) Любое замкнутое множество $F \in \mathfrak{F}$ является функционально замкнутым, то есть $\exists f \in C(X): f^{-1}(0) = F$.

(*б*) Любое открытое множество $G \in \mathfrak{G}$ является функционально открытым, то есть $\exists f \in C(X): f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = G$.

Пользуясь утверждениями (*а*) и (*б*), получите свойство совершенной нормальности МП. (См. упр.1.5.13.)

(*в*) Пусть $F_i \in \mathfrak{F} (i = 1,2)$ и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Докажите существование такой функции $f \in C(X)$, что $f(X) \subset [0,1]$, $f^{-1}(0) = F_1$ и $f^{-1}(1) = F_2$.

1.9.9. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $f: X \to Y$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) f равномерно непрерывна на X;

(*б*) $\forall \{x_n'\}_{n=1}^\infty \subset X\, \forall \{x_n''\}_{n=1}^\infty \subset X : (\lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(x_n',x_n'') = 0) \Rightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} \rho_Y(f(x_n'),f(x_n'')) = 0)$.

1.9.10. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) и (Z,ρ_Z) – МП, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Докажите, что из равномерной непрерывности f на X и равномерной непрерывности g на Y вытекает равномерная непрерывность композиции $g \circ f$ на X.

1.9.11. (*а*) Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, $f: X \to Y$. Докажите равномерную непрерывность отображения *f* на всём пространстве, если оно удовлетворяет на *X* условию Гёльдера, то есть

$$\exists L \geq 0 \exists \alpha > 0 \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X: \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho_X^{\alpha}(x_1, x_2).$$

(При $\alpha = 1$ условие Гёльдера превращается в уже обсуждавшееся выше условие Липшица, следовательно, липшицевы отображения, в частности, сжатия, являются равномерно непрерывными на всём пространстве.)

(*б*) Пусть (X,ρ) – МП, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, $a \in X$. Докажите равномерную непрерывность на *X* функций $f(x)$ и $g(x)$ из упр.1.9.6.

1.9.12. Докажите равномерную непрерывность на всём пространстве функции (функционала) *f*, действующей из МП $(\mathbf{C}[a,b], \rho_p), 1 \leq p \leq \infty$, в МП $(\mathbb{R}, \rho)$, где ρ – естественная метрика, если

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt, \quad x = x(t) \in \mathbf{C}[a,b].$$

1.9.13*. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите справедливость следующих критериев:

(*а*) Множество $K \subset X$ является компактом тогда и только тогда, когда любая функция $f \in C(K)$ ограничена на *K*.

(*б*) Множество $K \subset X$ является компактом тогда и только тогда, когда любая функция $f \in C(K)$ достигает на *K* своих точных граней.

1.9.14. Пусть (X,ρ_X) – компактное МП, (Y,ρ_Y) – МП и отображение $f \in C(X,Y)$ биективно. Докажите, что *f* – гомеоморфизм двух компактных МП.

1.9.15*. Пусть (X,ρ_X) – компактное МП. Докажите, что следующие МП являются полными:

(*а*) $(C(X), \rho_\infty)$, где $\rho_\infty(f,g) = \max\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$, $f = f(x)$, $g = g(x)$;

(*б*) $(C(X,Y), \rho_\infty)$, где (Y,ρ_Y) – полное МП, $\rho_\infty(f,g) = \max\limits_{x\in X} \rho_Y(f(x), g(x))$, $f = f(x)$, $g = g(x)$. Покажите, что МП $(C(X,Y), \rho_\infty)$, является замкнутым подпространством в МП (B, ρ_B) из упр 1.1.10. (См. также упр.1.7.6.)

1.9.16. Пусть (X,ρ) – МП. Докажите справедливость следующих утверждений:

(*а*) для любого непустого компакта $K \subset X$ и любой точки $a \in X$ достигается расстояние $\rho(a,K)$, то есть существует такая точка $b \in K$, что $\rho(a,K) = \rho(a,b)$;

(*б*) для любых непустых компактов $K_1 \subset X$ и $K_1 \subset X$ достигается расстояние $\rho(K_1,K_2)$, то есть существуют такие точки $b_1 \in K_1$ и $b_2 \in K_2$, что $\rho(K_1,K_2) = \rho(b_1,b_2)$;

(*в*) для любого непустого компакта $K \subset X$ достигается его диаметр $\operatorname{diam} K$, то есть существуют такие точки $b_1 \in K$ и $b_2 \in K$, что $\operatorname{diam} K = \rho(b_1,b_2)$.

1.9.17*. Пусть (X,ρ) – компактное МП и $f: X \to X$ – строгое сжатие пространства *X* в себя. Докажите, что *f* имеет единственную неподвижную точку. (Ср. с упр.1.7.15.)

1.9.18*. Пусть (X,ρ) – МП, $f: X \to X$ – строгое сжатие пространства *X* в себя и $f(X)$ – компакт. Докажите, что *f* имеет единственную неподвижную точку. (Ср. с упр.1.7.15.)

1.9.19*. Пусть (X,ρ) – компактное МП и $f: X \to X$ – растягивающее отображение пространства *X* в себя, то есть

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) \geq \rho(x_1, x_2).$$

Докажите, что *f* сюръективно и изометрично.

§ 1.10. Связные МП.

В классической теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции существенным является тот факт, что функция определена на числовом промежутке. Обобщением понятия промежутка являются так называемые связные МП.

Определение. МП называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых открытых множеств, не имеющих общих точек. В противном случае МП называется несвязным.

Другими словами, МП связно, если в нём нет нетривиальных (т.е. отличных от $\varnothing$ и всего пространства) открыто-замкнутых множеств.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $Y \subset X$ называется связным в МП (X,ρ), если подпространство (Y,ρ_Y) этого МП является связным МП.

Учитывая связь между открытыми множествами в МП (X,ρ) и его подпространстве (Y,ρ_Y) (см.упр.1.5.11), несвязность множества *Y* в МП (X,ρ) на формальном языке записывается следующим образом:

(Y несвязно в МП (X,ρ)) $\Leftrightarrow (\exists G_1 \in \mathfrak{G}_\rho(X)\ \exists G_2 \in \mathfrak{G}_\rho(X)$: $(G_1 \cap Y \neq \varnothing) \wedge (G_2 \cap Y \neq \varnothing) \wedge$ $\wedge (G_1 \cap G_2 = \varnothing) \wedge (Y \subset G_1 \cup G_2))$.

Следовательно, связность непустого множества *Y* в МП (X,ρ) формулируется так:

(Y связно в МП (X,ρ)) $\Leftrightarrow (\forall G_1 \in \mathfrak{G}_\rho(X)\ \forall G_2 \in \mathfrak{G}_\rho(X)$: $((G_1 \cap Y \neq \varnothing) \wedge (G_2 \cap Y \neq \varnothing) \wedge$ $\wedge (Y \subset G_1 \cup G_2)) \Rightarrow (G_1 \cap G_2 \cap Y \neq \varnothing))$.

Очевидно, что пустое множество и одноэлементные множества в МП являются связными множествами, а все конечные множества, содержащие более одного элемента, несвязны. (Дайте соответствующую аргументацию!)

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $Y \subset X$ называется областью в МП (X,ρ), если *Y* открыто и связно.

Определение. Пусть (X,ρ) – МП. Множество $Y \subset X$ называется компонентой связности в МП (X,ρ), если *Y* является максимальным связным подмножеством, то есть, если оно связно и не содержится ни в каком отличном от себя связном множестве этого МП.

Ясно, что в связном МП единственной компонентой связности является всё пространство.

Обобщение теоремы о промежуточных значениях для отображений в МП формулируется следующим образом.

Теорема о непрерывном образе связного множества. ([2], с.43; [6], с.38-39.) Пусть $f \in C(X,Y)$, где (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, *Y* – связное множество в МП (X,ρ_X). Тогда $f(Y)$ – связное множество в МП (Y,ρ_Y).

Частным случаем этой теоремы является следующее утверждение.

Обобщение теоремы Больцано-Коши для числовых непрерывных функций. Пусть $f \in C(X)$, где (X,ρ_X) – МП, и *Y* – связное множество в МП (X,ρ_X). Тогда для любых $a \in Y$ и $b \in Y$ функция $f(x)$ принимает на *Y* все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Наряду с понятием связности в МП вводится более сильное понятие линейной связности.

Определение. Пусть (X,ρ_X) – МП. Путём в МП (X,ρ_X) называется любое непрерывное отображение $f:[0,1] \to X$ из МП $([0,1],\rho)$ с естественной метрикой ρ в МП (X,ρ_X). При этом точки $f(0) \in X$ и $f(1) \in X$ называются соответственно началом и концом пути *f*, а $f([0,1]) \subset X$ называют носителем пути *f* или (непрерывной) кривой в *X*, параметризацией которой является путь *f*. Точки $a \in X$ и $b \in X$ называются соединимыми некоторым путём в МП (X,ρ_X), если существует путь *f* в МП (X,ρ_X) с началом в точке *a* и концом в точке *b*.

Определение. МП (X,ρ_X) называется линейно связным, если любые его две точки соединимы некоторым путём в (X,ρ_X). Множество $Y \subset X$ называется линейно связным в МП (X,ρ_X), если подпространство (Y,ρ_Y) этого МП является линейно связным МП.

Ясно, что множество $Y \subset X$ является линейно связным в МП (X,ρ_X) тогда и только тогда, когда любые две его точки соединимы некоторым путём в МП (X,ρ_X), носитель которого содержится в Y. Всякое линейно связное множество в МП (X,ρ_X) является связным в этом МП, но обратное утверждение неверно. (См. упр.1.10.10 и упр.1.10.12.)

Упражнения. 1.10.1. (*а*) Докажите, что на действительной прямой с естественной метрикой непустыми связными множествами являются промежутки и только они, при этом одноточечные множества тоже считаются (вырожденными) промежутками.

(*б*) Дайте описание связных множеств в дискретном МП (упр.1.1.4).

Какие множества являются областями в МП из пунктов (*а*) и (*б*)?

1.10.2. Пусть (X,ρ) – МП. Множества $Y \subset X$ и $Z \subset X$ называются отделёнными в МП (X,ρ), если $\overline{Y} \cap Z = \varnothing$ и $Y \cap \overline{Z} = \varnothing$.

(*а*) Докажите, что отделённость как пары открытых множеств, так и пары замкнутых множеств равносильна их непересекаемости.

(*б*) Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(1) Множества $Y \subset X$ и $Z \subset X$ отделены в МП (X,ρ).

(2) $\exists G_1 \in \mathfrak{G}_\rho(X)\ \exists G_2 \in \mathfrak{G}_\rho(X)$: $(G_1 \supset Y) \wedge (G_2 \supset Z) \wedge (G_1 \cap G_2 = \varnothing)$.

(*в*) Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(3) МП (X,ρ) связно.

(4) Если $X = Y \cup Z$ и множества Y и Z отделены, то одно из них пусто.

1.10.3. Пусть (X,ρ) – МП и $Y \subset X$ – связное множество в МП (X,ρ). Докажите, что для любой пары A и B отделённых множеств в МП (X,ρ) (см. упр.1.10.2) из включения $Y \subset A \cup B$ вытекает одно из включений $Y \subset A$ или $Y \subset B$.

1.10.4*. Докажите следующие утверждения:

(*а*) МП является связным в том и только в том случае, если любая пара его точек содержится в некотором связном множестве этого МП.

(*б*) Если в МП содержится всюду плотное связное множество, то МП связно.

(*в*) Замыкание связного в МП множества тоже связное множество в этом МП.

(*г*) Пусть (X,ρ) – МП и $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – семейство связных множеств в МП (X,ρ), причём $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \varnothing$. Тогда множество $A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ связно в МП (X,ρ).

1.10.5*. Докажите, что МП (X,ρ) связно тогда и только тогда, когда множеством значений любой функции $f \in C(X)$ является промежуток (возможно вырожденный).

1.10.6. Пусть $(X_i,\rho_i)(i=1,2)$ – МП, $X = X_1 \times X_2$ и (X,ρ) – декартово произведение МП (X_1,ρ_1) и (X_2,ρ_2) (см. упр.1.3.12(*а*)). Докажите, что если A_i – связное множество в МП $(X_i,\rho_i)(i=1,2)$, то $A = A_1 \times A_2$ – связное множество в МП (X,ρ).

1.10.7*. Пусть (X,ρ) – МП и $a \in X$. Связной компонентой точки a называется наибольшее связное множество, содержащее точку a. Докажите следующие утверждения:

(*а*) У каждой точки $a \in X$ существует непустая связная компонента, которая является замкнутым множеством.

(*б*) Для любых двух точек пространства X связные компоненты либо совпадают, либо не пересекаются.

(в) Компонента связности МП является связной компонентой каждой своей точки.

Таким образом, МП является объединением попарно не пересекающихся компонент связности и тем самым в МП имеет место следующее отношение эквивалентности: точки $a \in X$ и $b \in X$ эквивалентны, если у них общая связная компонента.

1.10.8. Найдите компоненты связности следующих числовых множеств в МП $(\mathbb{R},\rho)$, где ρ – естественная метрика:

(*а*) $\mathbb{R}$; (*б*) $\{a_1,a_2,\dots a_n\}$; (*в*) $[0,1]\cup\{2\}$; (*г*) $[0,1)\cup(1,2]$; (*д*) $\mathbb{N}$; (*е*) $\mathbb{Q}$; (*ж*) канторово множество.

1.10.9. Докажите, что линейно связное множество в МП является связным множеством в МП.

1.10.10. Докажите, что в МП $(\mathbb{R},\rho)$, где ρ – естественная метрика, понятия сязности и линейной связности совпадают.

1.10.11. Пусть $f \in C(X,Y)$, где (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – МП, Y – линейно связное множество в МП (X,ρ_X). Докажите, что $f(Y)$ – линейно связное множество в МП (Y,ρ_Y).

1.10.12*. Покажите, что множество

$$A = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1>0)\wedge(x_2=\sin\frac{1}{x_1})\} \cup \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1=0)\wedge(-1\le x_2\le 1)\}$$

является связным в МП $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$, но не является линейно связным множеством в этом МП.

II. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 2.1. Норма в линейных пространствах.

Отметим, что, в отличие от общего случая МП, естественная метрика $\rho(x,y)=|x-y|$ на множестве $\mathbb{R}$, введённая с использованием понятия модуля действительного числа, обладает, кроме свойств (1) – (3), дополнительными свойствами, связанными с наличием в $\mathbb{R}$ алгебраических операций сложения и умножения, а именно:

(4) $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ \forall z\in\mathbb{R}$: $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$;

(5) $\forall \alpha\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}$: $\rho(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\,\rho(x,y)$.

Анализ этих свойств приводит к понятию линейного нормированного пространства, впервые в современном виде сформулированном в 1922 году независимо друг от друга С. Банахом, американским математиком Н. Винером (N. Wiener) и австрийским математиком Г. Ханом (H.Hahn).

Определение. Пусть X – линейное пространство (ЛП) над полем $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{P}=\mathbb{C}$). Функция $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ $(X\ni x\mapsto\|x\|\in\mathbb{R})$ называется нормой на (или в) ЛП X, если выполнены условия (аксиомы):

(1) $\forall x\in X: \|x\|\ge 0$, причём $(\|x\|=0)\Leftrightarrow(x=0)$ (аксиома положительной определённости нормы);

(2) $\forall\alpha\in\mathbb{P}\ \forall x\in X: \|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ (аксиома абсолютной однородности);

(3) $\forall x\in X\ \forall y\in X: \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (аксиома треугольника).

Пара $(X,\|\cdot\|)$ называется линейным нормированным пространством (для удобства будем пользоваться также аббревиатурой ЛНП). Если понятно о какой норме идёт речь, то говорят о ЛНП X вместо $(X,\|\cdot\|)$. В случае $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ ЛНП называется вещественным, а в случае $\mathbb{P}=\mathbb{C}$ – комплексным.

Если в определении аксиому (1) заменить условием:

(1*а*) $\forall x\in X: \|x\|\ge 0$, причём $(x=0)\Rightarrow(\|x\|=0)$ (аксиома неотрицательной определённости нормы),

то в этом случае $\|\,.\,\|$ называется полунормой, а пара $(X, \|\,.\,\|)$ – линейным полунормированным пространством.

Замечания. 1) Как и в случае МП, несложно предложить процедуру перехода от полунормированного пространства к нормированному. Пусть L – подпространство тех $x \in X$, для которых выполняется $\|x\| = 0$. Введём отношение эквивалентности в X, полагая векторы $x \in X$ и $y \in X$ эквивалентными, если существует такой вектор $z \in L$, что $x - y = z$. Пусть $\hat{x}$ – обозначение класса эквивалентности, который порождается элементом $x \in X$, и пусть $\hat{X}$ – множество классов эквивалентности, отвечающих рассматриваемому отношению эквивалентности. Тогда на $\hat{X}$ можно ввести операции сложения векторов и умножения скаляра на вектор:

$$\forall \hat{x} \in \hat{X}\ \forall \hat{y} \in \hat{X} : \hat{x} + \hat{y} = \hat{z}, \text{ где } z = x + y, x \in \hat{x}, y \in \hat{y};$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{P}\ \forall \hat{x} \in \hat{X} : \alpha\hat{x} = \hat{w}, \text{ где } w = \alpha x, x \in \hat{x},$$

а также норму $\|\cdot\|^{\wedge}$ посредством формулы:

$$\|\hat{x}\|^{\wedge} = \|x\|,\ x \in \hat{x}.$$

Полученное ЛНП $(\hat{X}, \|\cdot\|^{\wedge})$ называется фактор-пространством, порождаемым полунормой $\|\,.\,\|$.

2) Понятие нормы в ЛП является обобщением понятия модуля числа, а также длины вектора на плоскости или в трёхмерном пространстве.

Определение. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – ЛНП. Метрическим пространством, порождённым нормой $\|\cdot\|$, называется МП (X, ρ), где $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Метрика на ЛП, порождённая нормой, очевидно, обладает дополнительными свойствами:

(4) $\forall x \in X\ \ \forall y \in X\ \ \forall z \in X :\ \rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ (инвариантность метрики относительно сдвига);

(5) $\forall \alpha \in \mathbb{P}\ \forall x \in X\ \ \forall y \in X :\ \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\,\rho(x, y)$ (абсолютная однородность метрики).

Упражнения. 2.1.1. Докажите, что в соответствии с оп 1санной в Замечании 1) процедурой справедливы следующие утверждения:

(*а*) L является линейным подпространством ЛП X над полем $\mathbb{P}$; (*б*) введённое отношение является отношением эквивалентности; (*в*) операции сложения векторов и умножения скаляра на вектор на $\hat{X}$ корректно определены; (*г*) $\hat{X}$ является ЛП над полем $\mathbb{P}$; (*д*) функция $\|\cdot\|^{\wedge}$ корректно определена на $\hat{X}$; (*е*) $\|\cdot\|^{\wedge}$ является нормой на $\hat{X}$.

2.1.2. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$, (X, ρ) – МП и метрика ρ удовлетворяет условиям (1) – (5). Докажите, что функция $\|x\| = \rho(x, 0), x \in X$, является нормой на ЛП X, и метрика ρ порождается этой нормой.

2.1.3. Докажите, что метрика, порождённая нормой на нетривиальном ЛП (тривиальным называется ЛП $X = \{0\}$), неограничена.

Приведите пример метрики на ЛП, которая не порождается никакой нормой на этом ЛП.

2.1.4. Пусть $(X, \|\,.\,\|)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$. Докажите следующие неравенства:

(*а*) $\forall x \in X\ \forall y \in X : |\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x \pm y\|$; (*б*) $\forall \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset X : \|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$.

Докажите, что норма – равномерно непрерывная функция на X.

2.1.5. (Классические нормы в ЛП $\mathbb{R}^n$.) (*а*) Проверьте, что метрика ρ_∞ из упр.1.1.5(*в*) порождается следующей нормой в $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{(чебышёвская норма в } \mathbb{R}^n\text{)}.$$

(*б*) Проверьте, что метрики $\rho_p, 1 \le p < \infty$, из упр.1.1.5(*д*) порождаются следующими нормами в $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{(}p\text{-норма Минковского в } \mathbb{R}^n\text{)}.$$ В частности, при $p = 1$ получается "уличная" норма, а при $p = 2$ – евклидова.

Покажите, что неравенства (1.2) в терминах норм принимают следующую форму:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall p \in [1, +\infty)\ \forall q \in [1, +\infty) : (p < q) \Rightarrow (\|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty). \quad (2.1)$$

Покажите, что $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

(*в*) Покажите, что метрики $\rho_p, 0 < p < 1$, из упр.1.1.5(*е*) не порождаются никакими нормами в $\mathbb{R}^n$.

2.1.6. (Классические нормы в ЛП числовых последовательностей.) (*а*) Проверьте, что метрика ρ_∞ из упр.1.1.7(*а*) порождается следующей нормой в l_∞:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{(ЛНП ограниченных последовательностей)}.$$

(*б*) Проверьте, что метрики $\rho_p, 1 \le p < \infty$, из упр.1.1.7(*г*) порождаются следующими нормами в l_p:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p, \quad \text{(}p\text{-норма Минковского)}.$$

Покажите, что неравенства (1.5) в терминах норм принимают следующую форму:

$$\forall x \in l_1 :\ \|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p \le \|x\|_1. \quad (2.2)$$

Покажите, что $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

(*в*) Покажите, что метрики $\rho_p, 0 < p < 1$, из упр.1.1.7(*д*) не порождаются никакими нормами в ЛП l_p.

(*г*) Покажите, что метрика ρ_s из упр.1.1.7(*е*) не порождается никакой нормой в ЛП s.

2.1.7. (Классические нормы в ЛП $\mathbf{C}[a, b]$.) (*а*) Проверьте, что метрика ρ_∞ из упр.1.1.6(*а*) порождается следующей нормой в $\mathbf{C}[a, b]$:

$$\|x\|_\infty = \max_{a \le t \le b} |x(t)|,\ x = x(t), \quad \text{(чебышёвская норма в } \mathbf{C}[a, b]\text{)}.$$

(*б*) Проверьте, что метрики $\rho_p, 1 \le p < \infty$, из упр.1.1.6(*г*) порождаются следующими нормами в $\mathbf{C}[a, b]$:

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty,\ x = x(t), \quad \text{(интегральная } p\text{-норма Минковского в } \mathbf{C}[a, b]\text{)}.$$

Покажите, что в терминах норм неравенства (1.3) и (1.4) принимают соответственно форму:

$$\forall x \in \mathbf{C}[a, b]\ \forall p \in [1, +\infty)\ \forall q \in [1, +\infty) :\ (p < q) \Rightarrow (\|x\|_p \le (b - a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q), \quad (2.3)$$

$$\|x_p\| \le (b - a)^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty. \quad (2.4)$$

Покажите, что $\lim\limits_{p\to\infty} \| x \|_p = \| x \|_\infty$.

(*в*) Покажите, что метрики ρ_p, $0 < p < 1$, из упр.1.1.6(*д*) не порождаются никакими нормами в ЛП $\mathbf{C}[a,b]$.

2.1.8. Проверьте, что полуметрики $\rho_p, 1 \le p < \infty$, из упр.1.1.8 порождаются следующими полунормами на ЛП X_p:

$$\| x \|_p = \left(\int_a^b | x(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ x = x(t).$$

Переходя с помощью описанной выше в Замечании 1) процедуры к фактор-пространству, отвечающему полунорме $\| . \|_p$, получаем ЛНП $(\mathcal{R}^p[a,b], \| . \|_p)$ или просто $\mathcal{R}^p[a,b]$. Покажите, что при $1 \le p < q < \infty$ имеет место включение $\mathcal{R}^q[a,b] \subset \mathcal{R}^p[a,b]$ и для $\forall x \in \mathcal{R}^q[a,b]$ справедливо неравенство (2.3).

2.1.9. Проверьте, что метрика ρ_B из упр.1.1.9 порождается следующей нормой на ЛП $B = B(X)$:

$$\| f \|_B = \sup_{x \in X} | f(x) |, \ f = f(x).$$

Покажите, что в случае компактного МП (X, ρ_X) норма $\| . \|_B$ на линейном подпространстве $C(X)$ ЛП $B(X)$ принимает форму

$$\| f \|_\infty = \max_{x \in X} | f(x) |, \ f = f(x),$$

и порождает метрику ρ_∞ на $C(X)$ из упр.1.9.15.

2.1.10. Докажите, что функция $\| . \|$ является полунормой в ЛП X и дайте описание подпространства, на котором она вырождается, если:

(*а*) $X = \mathrm{BV}[a,b]$ (ЛП функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$),

$$\| f \| = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f, \ f = f(t);$$

(*б*) $X = \mathrm{Lip}[a,b]$ (ЛП липшицевых функций на отрезке $[a,b]$),

$$\| f \| = \sup\{\frac{| f(t) - f(s) |}{| t - s |} : (a \le t \le b) \wedge (a \le s \le b) \wedge (t \ne s)\}, \ f = f(t).$$

Замечание. ЛП в упр.2.1.6-2.1.10 рассматриваются над полем $\mathbb{R}$, но могут рассматриваться и над полем $\mathbb{C}$. В первом случае функции (последовательности) являются вещественнозначными, а во втором – комплекснозначными.

В следующем упражнении даётся представление о декартовом произведении ЛНП.

2.1.11. Пусть $(X_i, \| . \|_i)(i = 1,2)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$ и $X = X_1 \times X_2$. Определим операции сложения векторов и умножения скаляра на вектор следующим образом:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in X \ \forall y = (y_1, y_2) \in X : \ x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2);$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{P} \ \forall x = (x_1, x_2) \in X : \ \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Докажите, что X становится ЛП над полем $\mathbb{P}$, а следующие функции являются нормами в этом ЛП, порождающими соответствующие метрики из упр.1.3.12:

(*а*) $\| x \| = \| x_1 \|_1 + \| x_2 \|_2$; (*б*) $\| x \|^\wedge = \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2}$; (*в*) $\| x \|^\sim = \max\{\| x_1 \|_1, \| x_2 \|_2\}$.

§ 2.2. Шары и сферы в ЛНП. Подпространства в ЛНП. Топология в ЛНП.

Форма шара в произвольном МП, вообще говоря, зависит от положения его центра и величины его радиуса (см., например, упр.1.2.7). Иное дело в ЛНП – здесь все открытые шары подобны друг другу, то есть справедливы следующие утверждения:

Теорема. Пусть $(X, \| . \|)$ – ЛНП.

(*а*) Для любого открытого шара $U_r(a) \subset X$ и любого отображения $f : X \to X$ вида $f(x) = \alpha x + b, x \in X$, множество $f(U_r(a))$ является открытым шаром в ЛНП X.

(*б*) Для любых открытых шаров $U_{r_1}(a_1) \subset X$ и $U_{r_2}(a_2) \subset X$ существует такое отображение $f : X \to X$ вида $f(x) = \alpha x + b, x \in X$, что $U_{r_2}(a_2) = f(U_{r_1}(a_1))$.

(Докажите эти простые утверждения!)

Другими словами, любой открытый шар в ЛНП может быть получен из любого другого открытого шара последовательным выполнением сдвига и гомотетии.

Аналогичные утверждения имеют место для замкнутых шаров и сфер.

В сравнении с МП шары в нетривиальных ЛНП обладают ещё некоторыми дополнительными свойствами. (См., например, упр.2.2.1.) Для их формулировки нам понадобятся новые определения.

Определение. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$. Прямой (действительной при $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ или комплексной при $\mathbb{P} = \mathbb{C}$), проходящей через точки $a \in X$ и $b \in X$ $(a \ne b)$, называется множество

$$L = \{x \in X \mid \exists \alpha \in \mathbb{P} : x = \alpha b + (1 - \alpha) a\} \subset X.$$

Лучом с началом в точке $a \in X$, проходящим через точку $b \in X$ $(a \ne b)$, называется множество

$$L_1 = \{x \in X \mid \exists \alpha \in [0, +\infty) : x = \alpha b + (1 - \alpha) a\} \subset X.$$

Отрезком с концами в точках $a \in X$ и $b \in X$ называется множество

$$[a,b] = \{x \in X \mid \exists \alpha \in [0,1] : x = \alpha b + (1 - \alpha) a\} \subset X.$$

(При $a = b$ отрезок вырождается в точку.)

Определение. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$ и $A \subset X$. Множество A называется выпуклым в ЛП X, если

$$\forall a \in A \ \forall b \in A : [a,b] \subset A,$$

то есть для любых двух точек множества A соединяющий их отрезок целиком лежит в множестве A.

Пересечение любого семейства выпуклых множеств в ЛП является выпуклым множеством (пустое множество тоже считается выпуклым). (Докажите это утверждение!)

Определение. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$ и $A \subset X$. Выпуклой оболочкой множества A называется наименьшее выпуклое множество, содержащее A. (Проверьте корректность этого определения!) Выпуклая оболочка множества обозначается $\mathrm{co}\, A$ или $\mathrm{conv}\, A$ (фр. convexe, анг. convex – выпуклый).

Определение. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$ и $A \subset X$. Множество A называется центрально-симметричным (относительно точки $x = 0$) в ЛП X, если

$$\forall x \in X : (x \in A) \Leftrightarrow (-x \in A).$$

Множество A называется уравновешенным в ЛП X, если

$$\forall x \in A \ \forall \alpha \in \mathbb{P} : (| \alpha | \le 1) \Rightarrow (\alpha x \in A).$$

Определение. Пусть $(X, \| . \|)$ – ЛНП, Y – линейное подпространство в X и $\| . \|_Y$ – сужение нормы $\| . \|$ на Y. ЛНП $(Y, \| . \|_Y)$ называется подпространством ЛНП $(X, \| . \|)$.

Упражнения. 2.2.1. Пусть $(X, \| . \|)$ – нетривиальное ЛНП. Докажите, что для шаров и сфер в ЛНП X имеют место свойства:

$$(a)\ \forall a \in X\ \forall r>0: S_r(a) \neq \varnothing; \quad (б)\ \forall a \in X\ \forall r>0: \overline{U_r(a)} = K_r(a);$$
$$(в)\ \forall a \in X\ \forall r>0: K_r(a) = \mathrm{co}(S_r(a)).$$

2.2.2. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$. Докажите, что

$$\mathrm{co}\, A = \{x \in X \mid \exists\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset A\ \exists\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\} \subset [0,1]: (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1) \wedge (x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)\}.$$

2.2.3. (*а*) Докажите, что в ЛНП любой открытый (замкнутый) шар с центром в нуле является выпуклым уравновешенным множеством. В частности, он является центрально-симметричным множеством в этом пространстве. Покажите, что любая сфера с центром в нуле является центрально-симметричным, но не является ни выпуклым, ни уравновешенным множеством.

(*б*) Докажите, что в нетривиальном ЛНП любой замкнутый шар пересекается с любым лучом, начинающимся в его центре, по невырожденному отрезку.

(*в*) Покажите, что если $\|\,.\,\|$ – полунорма в ЛП X, то множество $B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ может содержать прямую.

Свойство выпуклости шара в ЛНП оказывается может равносильным образом заменить аксиому треугольника в определении нормы, что вытекает из следующего упражнения.

2.2.4*. (*а*) Пусть X – линейное пространство (ЛП) над полем $\mathbb{P}$ и пусть функция $\|\,.\,\|: X \to \mathbb{R}$ ($X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$) удовлетворяет условиям (1) – (2) из определения нормы. Если множество $B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ выпукло в ЛП X, то функция $\|\,.\,\|$ удовлетворяет аксиоме треугольника и, следовательно, является нормой.

(*б*) Покажите, что не являются выпуклыми в ЛП X множества $B = \{x \in X : \|x\|_p \le 1\}$, $0 < p < 1$, если:

1) $X = \mathbb{R}^n\ (n>1)$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (Дайте иллюстрацию при $n = 2$.)

2) $X = l_p$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 3) $X = \mathbf{C}[a,b]$, $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = x(t)$.

2.2.5*. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$ и $B \subset X$ – выпуклое уравновешенное множество, пересекающее каждый луч с началом в точке $x = 0$ по невырожденному отрезку. Определим функцию:

$$\|x\| = \inf\{\alpha \in (0,+\infty) \mid \exists y \in B : x = \alpha y\},\ x \in X \text{ (функционал Минковского).}$$

Докажите, что $\|\,.\,\|$ – норма на X и $B = K_1(0)$.

2.2.6. Докажите, что ЛП сходящихся последовательностей c из упр.1.6.8(*и*) и ЛП бесконечно малых последовательностей c_0 из упр.1.6.8(*к*) с нормами, индуцированными нормой $\|\,.\,\|_\infty$, являются замкнутыми подпространствами в ЛНП $(l_\infty, \|\,.\,\|_\infty)$.

2.2.7. (*а*) Покажите, что подпространство в ЛНП может не являться замкнутым множеством, рассмотрев линейное подпространство так называемых конечных последовательностей

$$Y = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p \mid \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n = 0\}$$

в ЛНП $(l_p, \|\,.\,\|_p)$, $1 \le p < \infty$. (См.упр.2.1.6.) Покажите, что Y всюду плотно в l_p.

(*б*)* Докажите, что подпространство конечномерного ЛНП, отличное от всего пространства, является нигде не плотным множеством в ЛНП.

2.2.8. Пусть $(X, \|\,.\,\|)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$, $A \subset X$, $B \subset X$, $\Lambda \subset \mathbb{P}$. Суммой множеств A и B называется множество

$$A + B = \{x \in X \mid \exists y \in A\ \exists z \in B : x = y + z\}.$$

Произведением множеств Λ и B называется множество

$$\Lambda B = \{x \in X \mid \exists \lambda \in \Lambda\ \exists z \in B : x = \lambda z\}.$$

В частности, сумму $\{a\} + B$ обозначают $a + B$, а произведение $\{\lambda\}B$ обозначают λB.

(*а*) Пусть $A \subset X$, $G \in \mathfrak{G}$. Докажите, что $A + G \in \mathfrak{G}$. В частности, при любом $a \in X$ открыто множество $a + G$.

(*б*) Пусть $a \in X$, $F \in \mathfrak{F}$. Докажите, что $a + F \in \mathfrak{F}$.

(*в*) Опровергните в ЛНП $\mathbb{R}$ с естественной нормой утверждение:

$$((F_1 \in \mathfrak{F}) \wedge (F_2 \in \mathfrak{F})) \Rightarrow (F_1 + F_2 \in \mathfrak{F})).$$

(*г*) Пусть $G \in \mathfrak{G}$, $F \in \mathfrak{F}$. Докажите, что при всех $\lambda \in \mathbb{P}\setminus\{0\}$: $\lambda G \in \mathfrak{G}$ и при всех $\lambda \in \mathbb{P}$: $\lambda F \in \mathfrak{F}$.

(*д*) Верно ли, что сумма двух нигде не плотных множеств является нигде не плотным множеством? Найдите сумму $C + C$, где C – канторово множество из упр.1.6.6.

§ 2.3. Сравнение норм в ЛП.

Определение сходимости в ЛНП $(X, \|\,.\,\|)$ последовательности точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ к точке $a \in X$ (см. соответствующее определение (1.8) для случая МП) принимает вид:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : \|x_n - a\| < \varepsilon).$$

При этом сравнение норм на одном и том же ЛП X определяется через сравнение порождаемых ими метрик.

Определение. Пусть $(X, \|\,.\,\|_1)$ и $(X, \|\,.\,\|_2)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$. Говорят, что норма $\|\,.\,\|_1$ не слабее нормы $\|\,.\,\|_2$ (или норма $\|\,.\,\|_2$ не сильнее нормы $\|\,.\,\|_1$, или норма $\|\,.\,\|_2$ подчинена норме $\|\,.\,\|_1$), если метрика ρ_1, порождаемая $\|\,.\,\|_1$, не слабее метрики ρ_2, порождаемой $\|\,.\,\|_2$.

Аналогично определяются эквивалентные нормы на X. Отметим, что сформулированное в упр.1.3.6 для метрик достаточное условие их эквивалентности в случае ЛНП становится также необходимым (см. упр.2.3.1).

Отметим специфику конечномерных ЛП, для которых имеет место следующее важное утверждение.

Теорема. ([5], с.56.) В конечномерном ЛП все нормы эквивалентны между собой. (См. также упр.2.3.2.)

Упражнения. **2.3.1*.** Пусть $(X, \|\,.\,\|_1)$ и $(X, \|\,.\,\|_2)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$. Докажите, что норма $\|\,.\,\|_1$ не слабее нормы $\|\,.\,\|_2$ тогда и только тогда, когда

$$\exists C > 0\ \forall x \in X : \|x\|_2 \le C\|x\|_1.$$

В частности, эти нормы эквивалентны в том и только в том случае, если

$$\exists c > 0\ \exists C > 0\ \forall x \in X : c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1.$$

2.3.2. Докажите теорему об эквивалентности норм в конечномерном ЛП, придерживаясь следующих указаний:

1) Выбрав какой-нибудь базис $\{e_1, e_2, \ldots e_n\} \subset X$ в ЛП X, введите функцию

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X,$$

и докажите, что эта функция является нормой на X (эту норму естественно называть чебышёвской относительно заданного базиса).

2) Если $\|.\|$ – норма в X, то пользуясь представлением вектора $x \in X$ в заданном базисе и свойствами нормы, докажите, что она не сильнее чебышёвской нормы $\|.\|_\infty$.

3) Для доказательства того, что $\|.\|_\infty$ не сильнее $\|.\|$, предположите противное и найдите такую последовательность векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|x_n\|_\infty > n\|x_n\|$.

4) Пронормировав последовательность по норме $\|.\|_\infty$, то есть перейдя к последовательности единичных векторов $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|_\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, и воспользовавшись тем, что сходимость по норме $\|.\|_\infty$ покоординатная, выделите из $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность, сходящуюся по этой норме к некоторому $a \in X$, $\|a\|_\infty = 1$.

5) Пользуясь подчинённостью нормы $\|.\|$ норме $\|.\|_\infty$, сделайте вывод о сходимости выделенной подпоследовательности к $a \neq 0$ по норме $\|.\|$ и получите противоречие с неравенствами $\|y_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{\|x_n\|_\infty} < \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.3.3. (*а*) С учётом утверждений упр.2.3.1 дайте геометрическую трактовку сравнимости норм в ЛНП в терминах шаров.

(*б*) Докажите, что в конечномерном ЛНП X топология не зависит от выбора нормы в X.

2.3.4*. Покажите, что в ЛП l_1 (см. упр.1.1.7) норма $\|.\|_p$ сильнее нормы $\|.\|_q$, если $1 \le p < q \le \infty$. (См. также упр.1.3.11 и упр.2.1.6.)

2.3.5*. Покажите, что в ЛП $\mathbf{C}[a,b]$ норма $\|.\|_q$ сильнее нормы $\|.\|_p$, если $1 \le p < q \le \infty$. (См. также упр.1.3.10 и 2.1.7.)

2.3.6. Докажите эквивалентность норм $\|.\|$, $\|.\|^{\wedge}$ и $\|.\|^{\sim}$ из упр.2.1.11, установив непосредственно неравенства, выписанные в критерии из упр.2.3.1.

§ 2.4. Полнота, компактность и связность в ЛНП.

Определение. ЛНП $(X, \|.\|)$ называется банаховым (БП), если МП, порождаемое нормой $\|.\|$, является полным.

Замечание. Эти ЛП названы так в честь С. Банаха, внёсшего огромный вклад в создание и разработку теории ЛНП.

Все конечномерные ЛНП являются полными, то есть являются БП. (См. упр.2.4.2.)

Определение. Два ЛНП над одним и тем же полем $\mathbb{P}$ называются изометрически изоморфными или просто изоморфными, если существует линейное биективное изометрическое отображение одного пространства на другое.

Оказывается, что в случае неполного ЛНП пополнение соответствующего МП может быть превращено в БП посредством введения в нём подходящим образом алгебраических операций, что отражено в следующем утверждении.

Уточнённая теорема Хаусдорфа о пополнении ЛНП. ([5], с.62-64.) Всякое ЛНП может быть пополнено до БП, которое единственно с точностью до изоморфизма. При этом исходное ЛНП с точностью до изоморфизма является всюду плотным подпространством своего пополнения.

Принципиальное различие между конечномерными и бесконечномерными ЛНП устанавливает теорема, доказанная в 1918 году венгерским математиком Ф. Риссом (F. Riesz).

Теорема Рисса. ([5], с.59; [12], с.133; [17], с.266.) Для того чтобы замкнутый шар в ЛНП являлся компактом, необходимо и достаточно, чтобы ЛНП было конечномерным.

Замечание. Риссом была доказана необходимость этого условия, доказательство достаточности является несложным упражнением. (См. упр.2.4.5.)

Оказывается, что для открытых множеств в ЛНП понятия связности и линейной связности совпадают.

Теорема. ([13], с.95-96.) Открытое множество в ЛНП связно в том и только в том случае, если оно линейно связно.

Таким образом, в ЛНП область может быть определена как открытое и линейно связное множество.

Упражнения. 2.4.1. Пусть $(X, \|.\|_1)$ и $(X, \|.\|_2)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$ и пусть нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ эквивалентны. Докажите, что $(X, \|.\|_1)$ – БП тогда и только тогда, когда $(X, \|.\|_2)$ – БП. (Ср. с упр.1.7.3.)

2.4.2. Докажите полноту конечномерного ЛНП, придерживаясь следующих указаний:

1) С учётом эквивалентности норм в конечномерном ЛНП (упр.2.3.2) аргументируйте достаточность доказательства полноты в случае чебышёвской (относительно какого-нибудь базиса) нормы.

2) Убедившись, что фундаментальность и сходимость относительно чебышёвской нормы покоординатные (относительно выбранного базиса), воспользуйтесь леммой Больцано-Вейерштрасса.

2.4.3. Пусть $(X, \|.\|)$ – БП. Докажите, что подпространство $(Y, \|.\|_Y)$ в ЛНП $(X, \|.\|)$ является БП тогда и только тогда, когда Y замкнуто.

2.4.4*. Докажите, что является полным ЛНП $(B(\mathbb{R}), \|.\|_B)$, где $\|.\|_B$ – норма из упр.2.1.9 при $X = \mathbb{R}$. (См. также упр.1.1.9 и упр.1.7.6.) Являются ли БП следующие подпространства этого пространства ($\mathbb{R}$ рассматривается с естественной метрикой):

(*а*) $C_b(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R})\colon f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}\}$; (*б*) $C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R})\colon \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\}$;

(*в*) $C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} f$ – компакт$\}$, где $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}\colon f(x) \neq 0\}}$ – носитель функции f. (Анг. и фр. support –носитель.)

2.4.5. Докажите, что в конечномерном ЛНП множество является компактом в том и только в том случае, если оно ограничено и замкнуто.

2.4.6*. Получите из теоремы Рисса утверждение о том, что сфера в ЛНП компактна тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.

2.4.7*. Докажите следующий критерий относительной компактности в БП $(c, \|.\|_c)$ и $(c_0, \|.\|_{c_0})$ (см. упр.1.6.8.(*и-к*) и упр.1.7.5(*д-е*)), где $\|.\|_c$ и $\|.\|_{c_0}$ – нормы, индуцированные нормой $\|.\|_\infty$ (см. упр.2.1.7(*а*)) на подпространствах с и c_0 соответственно:

Для того чтобы множество $K = \{x^{(\alpha)} = \{x_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^{\infty} \mid \alpha \in A\} \subset c$ (соответственно $\subset c_0$) являлось относительно компактным в БП $(c, \|.\|_c)$ (соответственно в БП $(c_0, \|.\|_{c_0})$) необходимо и достаточно, чтобы K было ограниченным в этом БП и чтобы $x_n^{(\alpha)} \rightrightarrows a^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$ (соответственно $x_n^{(\alpha)} \rightrightarrows 0$) на A при $n \to \infty$.

Замечание. Последнее условие означает равномерное относительно параметра $\alpha \in A$ стремление к пределу $a^{(\alpha)}$ (соответственно к пределу 0) последовательности $x_n^{(\alpha)}$ при $n \to \infty$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in A\ \forall n > N_\varepsilon : |x_n^{(\alpha)} - a^{(\alpha)}| < \varepsilon\ (\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall \alpha \in A\ \forall n > N_\varepsilon\ |x_n^{(\alpha)}| < \varepsilon).$$

2.4.8. (*а*) Докажите, что все непустые выпуклые множества в ЛНП линейно связны. В частности, все подпространства в ЛНП являются линейно связными множествами.

(*б*) Докажите, что открытый и замкнутый шары в ЛНП являются линейно связными множествами. Верно ли это утверждение для сфер в ЛНП? (А если размерность ЛНП больше единицы?) Являются ли связными шары и сферы в МП?

§ 2.5. Линейные отображения в ЛНП.

Особую роль среди отображений $f: X \to Y$, действующих из одного ЛНП $(X, \|\cdot\|_X)$ в другое ЛНП $(Y, \|\cdot\|_Y)$ (оба над одним и тем же полем $\mathbb{P}$), играют линейные отображения (операторы), то есть отображения, удовлетворяющие следующему условию:

$$\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X\ \forall \alpha_1 \in \mathbb{P}\ \ \forall \alpha_2 \in \mathbb{P}: f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Традиционно такие операторы обозначают большими латинскими буквами, например, A, и вместо $A(x)$ пишут Ax. Семейство линейных операторов, действующих из ЛП X в ЛП Y, будем обозначать $\mathcal{L}(X,Y)$, или $\mathcal{L}(X)$ при $Y = X$. ($\mathcal{L}$ – первая буква анг. linear, фр. linéaire – линейный.) Ясно, что это семейство становится ЛП (над тем же полем $\mathbb{P}$), если ввести операции сложения операторов и умножения скаляра на оператор поточечно, то есть положив:

$$\forall A \in \mathcal{L}(X,Y)\ \forall B \in \mathcal{L}(X,Y)\ \forall \alpha \in \mathbb{P}\ \forall \beta \in \mathbb{P}\ \ \forall x \in X: (\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx.$$

При $Y = \mathbb{P}$ (с естественной нормой) линейный оператор называется линейным функционалом на X (при $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ – вещественным, а при $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ – комплексным) и обозначается, как и другие числовые функции, малыми латинскими буквами.

В общем случае ЛНП линейные операторы и функционалы могут быть как непрерывными, так и разрывными отображениями, но при этом непрерывность хотя бы в одной точке влечёт за собой непрерывность на всём пространстве. (См. упр.2.5.2.) Более того, оказывается, что непрерывность линейного оператора равносильна его липшицевости. (См. упр.2.5.1.) Впрочем, в теории линейных операторов исторически сложилась иная терминология.

Определение. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$ и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Линейный оператор A называется ограниченным, если

$$\exists M > 0\ \forall x \in X: \|Ax\| \le M\|x\|.$$

Замечание. Ограниченность линейного оператора не следует путать с его ограниченностью как отображения, действующего из одного ЛНП в другое (см. определение для случая МП в упр.1.1.10), которая для линейных отображений имеет место лишь в тривиальном случае нулевого оператора. (Почему?) Здесь снова приходится говорить о неудобствах, связанных с наличием в математике несогласованных обозначений и терминологии.

Множество ограниченных линейных операторов, действующих из ЛНП X в ЛНП Y, будем обозначать $\mathcal{B}(X,Y)$, или $\mathcal{B}(X)$ при $X = Y$. ($\mathcal{B}$ – первая буква анг. bounded – ограниченный.) Если ЛНП X конечномерно, то $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$. (См. упр.2.5.3.)

Определение. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$ и $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Нормой оператора A называется число

$$\|A\| = \sup\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : (x \in X) \wedge (x \ne 0)\}.$$

Таким образом, норма ограниченного оператора есть наименьшая константа Липшица для отображения A, которая может быть выражена также следующими формулами:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in K_1(0)\} = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in S_1(0)\}.$$

(Аргументируйте эти утверждения!) Из определения нормы оператора вытекает неравенство

$$\forall x \in X: \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|.$$

Сформулируем теперь упомянутый выше критерий непрерывности линейного оператора.

Теорема. ([5], с.97-98; [8], с.221-222; [10], с.106-107.) Для того чтобы линейный оператор, действующий из одного ЛНП в другое ЛНП, являлся непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Если $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ и $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$, где X, Y и Z – ЛНП над полем $\mathbb{P}$, то композиция (произведение) $BA \in \mathcal{B}(X,Z)$ и $\|BA\| \le \|B\|\,\|A\|$. (Докажите это неравенство!)

Упражнения. 2.5.1. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$ и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Докажите сформулированный выше критерий о том, что

$$A \in C(X,Y) \Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(X,Y),$$

воспользовавшись следующими указаниями:

1) Достаточность ($\Leftarrow$) доказывается тривиально.

2) Для доказательства необходимости ($\Rightarrow$) запишите на языке неравенств непрерывность оператора в точке $x = 0$ и воспользуйтесь тем, что ограниченность оператора A равносильна ограниченности $\frac{1}{\delta}\|Ax\|$ на шаре $K_\delta(0)$.

2.5.2. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$ и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(*а*) A непрерывен в точке $x = 0$; (*б*) $A \in C(X,Y)$; (*в*) A равномерно непрерывен на X.

2.5.3. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$, $\dim X < \infty$. Докажите, что $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

2.5.4*. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ – ЛНП и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – БП над одним и тем же полем $\mathbb{P}$. Докажите, что $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ – норма оператора, является БП над полем $\mathbb{P}$.

Замечание. При $Y = \mathbb{P}$ (с естественной нормой) БП $(\mathcal{B}(X, \mathbb{P}), \|\cdot\|)$ над $\mathbb{P}$ называется сопряжённым пространством по отношению к ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ и обозначается X^*.

2.5.5. (*а*) Докажите непрерывность линейного функционала

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt, \quad x = x(t) \in \mathbf{C}[a,b],$$

на ЛНП $(\mathbf{C}[a,b], \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, и найдите его норму. (См. также упр.1.9.12.)

(*б*) Пусть $X = \mathbf{C}^1[a,b]$, $Y = \mathbf{C}[a,b]$, $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_X$ – норма, индуцированная на $\mathbf{C}^1[a,b]$ нормой $\|\cdot\|_\infty$. Докажите, что оператор дифференцирования $D \in \mathcal{L}(X,Y)$, заданный посредством формулы $y = Dx$, где $y = x'(t)$, $x = x(t) \in \mathbf{C}^1[a,b]$, является неограниченным.

2.5.6. Пусть $(X, \|\cdot\|_1)$ и $(X, \|\cdot\|_2)$ – ЛНП над полем $\mathbb{P}$. Докажите, что норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|\cdot\|_2$ тогда и только тогда, когда единичный (тождественный) оператор $I \in L(X)$ ограничен как оператор, действующий из ЛНП $(X, \|\cdot\|_1)$ в ЛНП $(X, \|\cdot\|_2)$. Получите отсюда утверждение упр.2.3.1. (Ср.с упр.1.9.7.)

2.5.7*. Пусть $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, где $(X, \|\cdot\|_X)$ – ЛНП и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – БП над полем $\mathbb{P}$, причём $(X, \|\cdot\|_X)$ является всюду плотным подпространством в ЛНП $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$. Докажите, что существует единственное продолжение $\hat{A} \in \mathcal{B}(\hat{X}, Y)$ оператора A. (Это так называемое продолжение по непрерывности.)

§ 2.6. ЛП со скалярным произведением.

Напомним, что характерной чертой евклидовой плоскости и евклидового трёхмерного пространства является наличие в них скалярного произведения, которое позволяет ввести не только длину вектора, но и угол между векторами, в частности, понятие ортогональности. Эти соображения приводят к необходимости ввести соответствующие обобщения, впервые в абстрактной форме сформулированные в 1927 году венгерским (американским) математиком Дж. фон Нейманом (J. von Neumann).

Определение. Пусть X – ЛП над полем $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{P}=\mathbb{C}$). Функция $<.,.>: X\times X\to\mathbb{P}$ ($X\times X\ni(x,y)\mapsto<x,y>\in\mathbb{P}$) называется скалярным (внутренним) произведением в ЛП X, если выполнены условия (аксиомы):

(1) $\forall x\in X: <x,x>\geq 0$, причём $(<x,x>=0)\Leftrightarrow(x=0)$ (аксиома положительной определённости);

(2) $\forall x\in X\ \forall y\in X\ \forall z\in X\ \forall\alpha\in\mathbb{P}\ \ \forall\beta\in\mathbb{P}$: $<\alpha x+\beta y, z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$ (аксиома линейности по первому аргументу);

(3) $\forall x\in X\ \forall y\in X: <x,y>=\overline{<y,x>}$ (аксиома эрмитовости).

Пара $(X,<.,.>)$ называется ЛП со скалярным произведением.

Замечания. 1) При $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ условие (3) принимает вид:

(3*a*) $\forall x\in X\ \forall y\in X: <x,y>=<y,x>$ (аксиома симметричности).

2) Из (2) и (3) при $\mathbb{P}=\mathbb{C}$ получаем:

(2*a*) $\forall x\in X\ \forall y\in X\ \forall z\in X\ \forall\alpha\in\mathbb{P}\ \ \forall\beta\in\mathbb{P}$: $<z,\alpha x+\beta y>=\overline{\alpha}<z,x>+\overline{\beta}<z,y>$ (свойство антилинейности по второму аргументу).

Функции, действующие из $X\times X$ в $\mathbb{C}$ и обладающие свойствами (2) и (2*a*), называются полуторалинейными формами. При $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ по второму аргументу также имеет место линейность. Функции, линейные по каждому аргументу, называются билинейными. Таким образом, при $\mathbb{P}=\mathbb{C}$ скалярное произведение является полуторалинейной, а при $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ – билинейной формой.

Если ЛП X конечномерно, то при $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ пара $(X,<.,.>)$ называется евклидовым пространством, а при $\mathbb{P}=\mathbb{C}$ – унитарным.

Важную роль при изучении ЛП со скалярным произведением играет неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\forall x\in X\ \forall y\in X:\ |<x,y>|\leq\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>},$$

причём равенство в неравенстве КБШ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы. (См., например, [2], с.55; [18], с.13; [26], с.111.)

Замечание. Неравенство КБШ было доказано французским математиком О. Коши (A. Cauchy) для конечных сумм, а для интегралов – петербургским математиком В.Я. Буняковским и немецким математиком Г. Шварцем (H. Schwarz).

Определение Пусть $(X,<.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Нормой, порождённой скалярным произведением $<.,.>$, называется функция, заданная на X посредством формулы: $\|x\|=\sqrt{<x,x>},\ x\in X$.

Легко проверяется, что $\|.\|$ – действительно норма на X. (Проверьте это!) Соответствующие ЛНП и МП называются порождёнными скалярным произведением $<.,.>$.

Определение. Пусть $(X,<.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Если МП, порождённое скалярным произведением $<.,.>$ полно, то $(X,<.,.>)$ называется гильбертовым пространством (ГП), вещественным при $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ и комплексным при $\mathbb{P}=\mathbb{C}$. Если МП не обязательно полное, то пространство $(X,<.,.>)$ называют предгильбертовым.

Замечание. Эти ЛП названы так в честь немецкого математика Д. Гильберта (D. Hilbert), положившего своими исследованиями начало построению современной теории линейных операторов в бесконечномерных ЛП.

Таким образом, в силу полноты конечномерных ЛНП евклидово и унитарное ЛП являются частными случаями ГП. В свою очередь, ГП есть частный случай БП.

Если аксиому (1) в определении скалярного произведения заменить аксиомой неотрицательной определённости:

(1*a*) $\forall x\in X: <x,x>\geq 0$, причём $(x=0)\Rightarrow(<x,x>=0)$,

то в этом случае функция $<.,.>$ называется псевдоскалярным (или полускалярным) произведением, а пара $(X,<.,.>)$ – ЛП с псевдоскалярным произведением. Аналогично уже рассмотренным ранее случаям полуметрики и полунормы здесь тоже можно предложить очевидную процедуру перехода от полускалярного к скалярному произведению. (Дайте описание и аргументацию таких построений самостоятельно!)

Определение. Пусть $(X,<.,.>_X)$ и $(Y,<.,.>_Y)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Линейный оператор $U\in\mathcal{L}(X,Y)$ называется унитарным, если он биективен и

$$\forall x\in X\ \forall y\in X: <Ux,Uy>_Y=<x,y>_X.$$

При этом сами пространства $(X,<.,.>_X)$ и $(Y,<.,.>_Y)$ называются унитарно изоморфными или просто изоморфными.

Отметим, что линейный оператор, действующий из одного ЛП со скалярным произведением в другое, унитарен тогда и только тогда, когда он биективен и изометричен, то есть устанавливает изоморфизм ЛНП $(X,\|.\|_X)$ и $(Y,\|.\|_Y)$.(См. упр.2.6.4(*в*).)

Замечание. Традиционно унитарные операторы определяют для ГП, но это не принципиально в силу сформулированной ниже теоремы о пополнении и возможности продолжения ограниченных линейных операторов по непрерывности. (См. упр.2.5.7.)

В случае предгильбертового ЛП пополнение соответствующего МП может быть превращено в ГП посредством введения в нём подходящим образом алгебраических операций и скалярного произведения, что отражено в следующем утверждении.

Уточнённая теорема Хаусдорфа о пополнении предгильбертвых ЛП. ([5], с.152-154.) Всякое предгильбертово ЛП может быть пополнено до ГП, которое единственно с точностью до изоморфизма. При этом исходное предгильбертово пространство с точностью до изоморфизма является всюду плотным подпространством своего пополнения.

Следующее важное утверждение об общем виде линейных непрерывных функционалов в ГП доказано Ф. Риссом в 1934 году, хотя в частном случае оно было известно и раньше.

Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в ГП. ([10], с.154-155; [17], с.271; [18], с.65.) Всякий линейный непрерывный функционал $f\in X^*$ в ГП $(X,<.,.>)$ имеет вид

$$f(x)=<x,a>,\ x\in X,$$

где вектор $a=a_f\in X$ определяется функционалом f однозначно, при этом $\|f\|=\|a\|$.

Определение. Пусть $(X,<.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Векторы $x\in X$ и $y\in X$ называются ортогональными ($x\perp y$), если $<x,y>=0$. Множества $Y\subset X$ и $Z\subset X$ называются ортогональными ($Y\perp Z$), если $\forall y\in Y\ \forall z\in Z: y\perp z$. В частности, вектор $x\in X$ называется ортогональным множеству $Y\subset X$ ($x\perp Y$), если $\forall y\in Y: x\perp y$. Если $Y\subset X$, $Y\neq\varnothing$, то множество $Y^{\perp}=\{x\in X\mid x\perp Y\}$ называется ортогональным дополнением к множеству Y в ЛП $(X,<.,.>)$.

Определение. Пусть $(X,<.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$ называется ортогональной системой в X, если

$$\forall\alpha_1\in A\ \forall\alpha_2\in A: (\alpha_1\neq\alpha_2)\Rightarrow(x_{\alpha_1}\perp x_{\alpha_2}).$$

Если, кроме того, $\forall\alpha\in A: \|x_\alpha\|=1$, то система называется ортонормированной (ОНС).

Всякая ортогональная система является линейно независимой в ЛП X (т. е. любая конечная подсистема линейно независима в X). (См. упр.2.6.13.)

В ЛП со скалярным произведением справедлива

Теорема Пифагора. ([2], с.495.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Тогда

$$\forall x \in X\ \forall y \in X:\ (x \perp y) \Rightarrow (\| x+y\|^2 = \| x\|^2 + \| y\|^2).$$

Отсюда для любой конечной ортогональной системы $\{x_i\}_{i=1}^n$ в ЛП $(X, <.,.>)$ и её суммы $x = \sum_{i=1}^n x_i$ имеет место равенство $\| x\|^2 = \sum_{i=1}^n \| x_i\|^2$.

Теорема. ([5], с.148-149; [15], с.35-39.) Пусть $(X, <.,.>)$ – евклидово или унитарное пространство. Тогда в X существуют ортонормированные базисы, то есть такие ОНС $\{e_i\}_{i=1}^n$, что $n = \dim X$.

Очевидно, что в этом случае ОНС $\{e_i\}_{i=1}^n$ является базисом в X тогда и только тогда, когда справедливо любое из следующих эквивалентных утверждений:

(*а*) $\forall x \in X:\ x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$; (*б*) $\forall x \in X:\ \| x\|^2 = \sum_{i=1}^n |< x, e_i >|^2$;

(*в*) $\mathrm{Lin}\{e_i : 1 \le i \le n\} = X$, где $\mathrm{Lin}\, A$ – линейная оболочка множества $A \subset X$, то есть множество линейных комбинаций векторов из A. (Проверьте это!)

Аналогичные утверждения в бесконечномерных ЛП со скалярным произведением мы сформулируем лишь для счётных ортогональных систем. Ряд из векторов $\sum_{i=1}^\infty x_i$ в ЛНП называется сходящимся к вектору x ($x = \sum_{i=1}^\infty x_i$), если $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i$, при этом x называется суммой ряда.

Как обобщение теоремы Пифагора можно рассматривать следующее утверждение.

Теорема. ([15], с.155.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ – ортогональная система в X и $x = \sum_{i=1}^\infty x_i$. Тогда $\| x\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \| x_i\|^2$.

В случае полноты пространства имеет место следующий критерий сходимости рядов с попарно ортогональными членами.

Теорема. ([15], с.155-156.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ГП над полем $\mathbb{P}$ и $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ – ортогональная система в X. Для того чтобы ряд $\sum_{i=1}^\infty x_i$ сходился в X, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{i=1}^\infty \| x_i\|^2$.

Определение. Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$ и $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ОНС в X, $x \in X$. Числа $c_i = c_i(x) =< x, e_i >, i \in \mathbb{N}$, называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ – рядом Фурье вектора x по ОНС $\{e_i\}_{i=1}^\infty$.

Тот факт, что вектору x сопоставляется его ряд Фурье по ОНС $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, традиционно обозначают следующим образом: $x \sim \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$.

Замечание. Идеи рассмотрения таких рядов в частном случае тригонометрических систем (см. упр.2.6.18) восходят к французскому математику Ж. Фурье (J. Fourier).

Теорема. ([2], с.496; [5], с.209; [8], с.149-150.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$ и $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ОНС в X. Тогда для всех $x \in X$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^\infty |c_i(x)|^2 \le \| x\|^2 \text{ (неравенство Бесселя).}$$

Это неравенство в частном случае впервые рассматривалось немецким математиком Ф. Бесселем (F. Bessel).

Следствие 1. $\forall x \in X:\ \lim_{i\to\infty} c_i(x) = 0$.

Следствие 2. Для любого вектора в ГП его ряд Фурье по любой ОНС сходится.

С другой стороны, имеет место утверждение, являющееся абстрактной формой теоремы, доказанной в частном случае независимо Ф. Риссом и немецким математиком Е. Фишером (E. Fischer) в 1907 году.

Теорема Рисса-Фишера. ([8], с.151-152.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ГП над полем $\mathbb{P}$, $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ОНС в X, $\{c_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{P}$ и $\sum_{i=1}^\infty |c_i|^2 < +\infty$. Тогда существует такой вектор $x \in X$, что $\{c_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность его коэффициентов Фурье и $x = \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$.

Для формулирования условий, при которых каждый вектор в ЛП является суммой своего ряда Фурье по заданной ОНС, используют следующие свойства ОНС.

Определение. Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$ и $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ОНС в X.

(*а*) ОНС $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется полной в X, если $\mathrm{Lin}\{e_i : 1 \le i < \infty\} = X$;

(*б*) ОНС $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется ортонормированным базисом в X, если

$$\forall x \in X\ \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{P}:\ x = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i e_i;$$

(*в*) ОНС $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется замкнутой в X, если $\forall x \in X:\ \| x\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |< x, e_i >|^2$;

(*г*) ОНС $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется максимальной в X, если $\forall x \in X:\ (\forall i \in \mathbb{N}: x \perp e_i) \Rightarrow (x = 0)$.

Замечания. 1) Равенство в пункте (*в*) называется уравнением (условием) замкнутости ([15], с.163; [18], с.30) или равенством Парсеваля ([2], с.502; [5], с.209). В частном случае (для системы тригонометрических функций) уравнение замкнутости впервые было доказано в 1896 году А.М. Ляпуновым, работавшем в то время в Харьковском университете. Французский математик М. Парсеваль (M. Parseval) без обоснования рассматривал его ещё в 1799 году.

2) Из равенства в пункте (*б*) вытекает, что $\alpha_i = c_i(x), i \in \mathbb{N}$, то есть в случае, когда ОНС является базисом, каждый вектор в ЛП является суммой своего ряда Фурье. (Проверьте это!)

3) К сожалению, в теории рядов Фурье тоже не всегда придерживаются единой терминологии. Например, максимальность ОНС иногда называют полнотой ([10], с.83; [26], с.115), что в предгильбертовых пространствах, вообще говоря, не является равносильным. (См. замечание к следующей теореме и упр. 2.6.16.)

Теорема. ([2], с.502-505; [15], с.163-165.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ГП над полем $\mathbb{P}$ и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ОНС в X. Следующие свойства эквивалентны:

(*а*) система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна; (*б*) система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом; (*в*) система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута; (*г*) система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ максимальна.

Замечание. В предгильбертовых пространствах свойства (*а*) – (*в*) также являются эквивалентными, в то время как максимальность таких ОНС необходима, но, вообще говоря, уже не достаточна для справедливости свойств (*а*) – (*в*). (См. [2], с.502-506.)

Следствие. (Теорема единственности.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$ и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – полная ОНС в X, $x \in X$, $y \in X$. Если $c_i(x) = c_i(y), i \in \mathbb{N}$, то $x = y$. (Докажите это утверждение самостоятельно!)

Наконец, сформулируем критерий существования не более чем счётного ортонормированного базиса в ЛП.

Теорема. ([10], с.84-85; [15], с.168.) Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Для того чтобы в X существовал не более чем счётный ортонормированный базис, необходимо и достаточно, чтобы пространство X являлось сепарабельным.

В случае вещественного ЛП со скалярным произведением можно ввести понятие угла между векторами.

Определение. Пусть $(X, <.,.>)$ – вещественное ЛП со скалярным произведением, $x \in X$, $y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Углом между векторами x и y называется величина

$$(x\hat{\ }y) = \arccos\frac{<x, y>}{\|x\|\|y\|} \in [0, \pi].$$

В частности, векторы $x \neq 0$ и $y \neq 0$ ортогональны тогда и только тогда, когда $(x\hat{\ }y) = \frac{\pi}{2}$.

Упражнения. 2.6.1. Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$.

(*а*) Докажите неравенство КБШ, пользуясь следующими указаниями:

1) Для произвольного вектора вида $\alpha x + \beta y$, пользуясь свойствами скалярного произведения, распишите неравенство $<\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y> \geq 0$.

2) Подберите скаляры α и β так, чтобы в левой части неравенства появился квадратный трёхчлен от вещественной переменной и воспользуйтесь свойствами его дискриминанта.

(*б*) Выясните при каких x и y в неравенстве КБШ достигается равенство.

(*в*) При каких x и y имеет место равенство $<x, y> = \|x\|\|y\|$?

(*г*) Убедитесь, что неравенство КБШ справедливо для псевдоскалярного произведения, и докажите, что равенство в этом случае имеет место в том и только в том случае, если

$$\exists(\alpha, \beta) \neq (0,0) : <\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y> = 0.$$

2.6.2. Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$, $x \in X$, $y \in X$.

(*а*) Докажите, что

$$(\|x + y\| = \|x\| + \|y\|) \Leftrightarrow (\exists \alpha \geq 0 : (x = \alpha y) \vee (y = \alpha x)).$$

(*б*) Покажите, что в ЛНП утверждение ($\Rightarrow$) из (*а*), вообще говоря, неверно.

2.6.3. Докажите, что скалярное произведение непрерывно по своим аргументам, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \ \forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \ \forall a \in X \ \forall b \in X : ((\lim_{n\to\infty} x_n = a) \wedge (\lim_{n\to\infty} y_n = b)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lim_{n\to\infty} <x_n, y_n> = <a, b>).$$

2.6.4. (*а*) Пусть $(X, <.,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$. Докажите, что для порождённой скалярным произведением нормы имеет место "тождество параллелограмма":

$$\forall x \in X \ \forall y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(*б*)* Докажите, что справедливо обратное утверждение: если норма в ЛНП $(X, \|.\|)$ удовлетворяет "тождеству параллелограмма", то норма $\|.\|$ порождается некоторым скалярным произведением, которое может быть восстановлено по норме следующим образом:

1) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $\forall x \in X \ \forall y \in X : <x, y> = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$ (поляризационное тождество), где i – чисто мнимая единица, то есть $i^2 = -1$;

2) если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то $\forall x \in X \ \forall y \in X : <x, y> = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

(*в*) Докажите, что линейный оператор, действующий из одного ЛП со скалярным произведением в другое, унитарен тогда и только тогда, когда он биективен и изометричен.

2.6.5. (*а*) Проверьте, что $(\mathbb{R}^n, <.,.>)$ является евклидовым ЛП, где

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Запишите неравенство КБШ и дайте общий вид линейного функционала в этом пространстве. Покажите, что норма $\|.\|_2$ в ЛП $\mathbb{R}^n$ (см. упр.2.1.5(*б*)) порождается этим скалярным произведением.

(*б*) Проверьте, что $(\mathbb{C}^n, <.,.>)$ является унитарным ЛП, где

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Запишите неравенство КБШ и дайте общий вид линейного функционала в этом пространстве.

(*в*) Проверьте, что $(l_2, <.,.>)$ является гильбертовым ЛП над полем $\mathbb{R}$, где

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2, \ y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2.$$

Запишите неравенство КБШ и дайте общий вид линейного функционала в этом пространстве. Покажите, что норма $\|.\|_2$ в ЛП l_2 (см. упр.2.1.6(*б*)) порождается этим скалярным произведением.

(*г*) Проверьте, что $(\mathbf{C}[a, b], <.,.>)$ является предгильбертовым ЛП над полем $\mathbb{R}$, где

$$<x, y> = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad x = x(t) \in \mathbf{C}[a, b], \ y = y(t) \in \mathbf{C}[a, b].$$

Запишите неравенство КБШ и покажите, что норма $\|.\|_2$ в ЛП $\mathbf{C}[a, b]$ (см. упр.2.1.7(*б*)) порождается этим скалярным произведением.

(*д*)* Проверьте, что функция $<.,.>$ является псевдоскалярным произведением в ЛП X_2 (см. упр.1.1.8), где

$$<x, y> = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad x = x(t) \in X_2, \ y = y(t) \in X_2.$$

Переходя к фактор-пространству, отвечающему псевдоскалярному произведению $<.,.>$, получите предгильбертово ЛП $(\mathcal{R}^2[a, b], <.,.>)$ или просто $\mathcal{R}^2[a, b]$. Запишите неравенство КБШ, и покажите, что норма $\|.\|_2$ в ЛП $\mathcal{R}^2[a, b]$ (см. упр.2.1.8) порождается скалярным произведением в ЛП $\mathcal{R}^2[a, b]$. Проверьте, что предгильбертово ЛП $(\mathbf{C}[a, b], <.,.>)$ из пункта (*г*) с точностью до унитарного изоморфизма является всюду плотным подпространством в $(\mathcal{R}^2[a, b], <.,.>)$.

2.6.6. Покажите, что норма в БП $(\mathbf{C}[a, b], \|.\|_\infty)$ не порождается никаким скалярным произведением.

2.6.7. Докажите, что утверждение, обратное к теореме Пифагора, справедливо при $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, и покажите, что при $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ оно неверно. Докажите, что при $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ справедливо следующее утверждение:

$$\forall x \in X\ \forall y \in X : ((\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2) \wedge (\| x + iy \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2)) \Rightarrow (x \perp y),$$

где i – чисто мнимая единица, то есть $i^2 = -1$.

2.6.8. Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$.

(*а*) Докажите, что $\{0\}^{\perp} = X$ и $X^{\perp} = \{0\}$.

(*б*) Пусть $Y \subset X, Y \neq \varnothing$. Докажите, что множество $Y^{\perp}$ является замкнутым подпространством в ЛП $(X, <.\,,.>)$.

(*в*) Пусть $Y \subset X$, $Z \subset X$, $Y \neq \varnothing$ и $Z \neq \varnothing$. Докажите следующие утверждения:

1) $(Y \subset Z) \Rightarrow (Z^{\perp} \subset Y^{\perp})$; 2) $Y^{\perp} = (\overline{Y})^{\perp}$

2.6.9*. Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ГП над полем $\mathbb{P}$, $Y \subset X$ – непустое замкнутое выпуклое множество. Докажите, что для любой точки $a \in X$ достигается расстояние $\rho(a, Y)$, то есть существует такая точка $b \in Y$, что $\rho(a, Y) = \| a - b \|$.

2.6.10*. Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ГП над полем $\mathbb{P}$, Y – замкнутое подпространство в X. Докажите, что справедливы следующие утверждения:

(*а*) $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\ \exists! z \in Y^{\perp} : x = y + z$ (y и z – ортогональные проекции вектора x на подпространства Y и $Y^{\perp}$ соответственно);

(*б*) $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.

2.6.11. Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ГП над полем $\mathbb{P}$, Y и Z – подпространства в X, $Y \perp Z$. Пусть $Y \oplus Z = \{x \in X \mid \exists y \in Y\ \exists z \in Z : x = y + z\}$ (ортогональная сумма подпространств Y и Z).

(*а*) Докажите, что ортогональная сумма $Y \oplus Z$ является прямой суммсй $Y \dotplus Z$ подпространств Y и Z, то есть для $\forall x \in Y \oplus Z\ \exists! y \in Y\ \exists! z \in Z : x = y + z$.

(*б*) Докажите, что подпространство $Y \oplus Z$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты подпространства Y и Z.

(*в*) Пусть Y и W – замкнутые подпространства в X, $Y \subset W$. Докажите, что существует единственное замкнутое подпространство $Z \subset W$ такое, что $W = Y \oplus Z$. (Подпространство Z называется ортогональной разностью подпространств W и Y и обозначается $W \ominus Y$.)

2.6.12. Пользуясь теоремой Рисса, докажите, что:

(*а*) ГП над полем $\mathbb{R}$ изоморфно своему сопряжённому;

(*б*) ГП над полем $\mathbb{C}$ изоморфно пространству непрерывных антилинейных функционалов. (Функционал $f : X \to \mathbb{C}$ называется антилинейным, если $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X\ \forall \alpha_1 \in \mathbb{C}\ \forall \alpha_2 \in \mathbb{C}$: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \overline{\alpha}_1 f(x_1) + \overline{\alpha}_2 f(x_2)$.)

2.6.13. Докажите, что в пространстве со скалярным произведением любая ОНС является линейно независимой системой.

2.6.14. Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$ и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ОНС в X. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие соотношения:

(*а*) $x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i \perp \mathrm{Lin}\{e_i : 1 \le i \le n\}$; (*б*) $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i \right\|^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} |< x, e_i >|^2$;

(*в*)* $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i \right\| = \min\left\{ \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| : \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{P} \right\}$ (экстремальное свойство сумм ряда Фурье).

2.6.15. (Ортогонализация по Граму-Сонину-Шмидту.) Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – линейно независимая система векторов в X. Докажите, что:

(*а*) система векторов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, где

$$e_1 = \frac{x_1}{\| x_1 \|}, \quad e_{i+1} = \left(x_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < x_{i+1}, e_k > e_k \right) : \left\| x_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < x_{i+1}, e_k > e_k \right\|,$$

является ОНС в X;

(*б*) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Lin}\{e_i : 1 \le i \le n\} = \mathrm{Lin}\{x_i : 1 \le i \le n\}$; (*в*) $\overline{\mathrm{Lin}\{e_i : 1 \le i < \infty\}} = \overline{\mathrm{Lin}\{x_i : 1 \le i < \infty\}}$.

Замечание. Процесс ортогонализации системы векторов был независимо предложен датским математиком Й. Грамом (J. Gram), петербургским математиком Н.Я. Сониным и немецким математиком Э. Шмидтом (E. Schmidt).

2.6.16. Пусть $(X, <.\,,.>)$ – ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{R}$, где X – линейная оболочка в $(l_2, <.,.>)$ системы векторов $\{e_i\}_{i=2}^{\infty}$, дополненной вектором x. При этом $e_i = \{\delta_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ $(2 \le i < \infty)$ и $x = \{2^{-k}\}_{k=1}^{\infty}$. Покажите, что ОНС $\{e_i\}_{i=2}^{\infty}$ максимальна, но не является полной в $(X, <.\,,.>)$.

2.6.17. (*а*) Докажите, что в сепарабельном ЛП со скалярным произведением над полем $\mathbb{P}$ любая конечная ОНС является частью некоторого ортонормированного базиса.

(*б*)* Докажите, что утверждение (*а*) справедливо для счётных ОНС в сепарабельном ГП, и покажите, что для сепарабельных предгильбертовых пространств оно, вообще говоря, неверно.

2.6.18. В предгильбертовом ЛП $(\mathbf{C}[-\pi, \pi], <.,.>)$ из упр.2.6.5(*г*) проверьте, что система функций $A = \{\sin kt \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos mt \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ является ортогональной.

2.6.19. Докажите, что система полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n$, является ортогональной системой в предгильбертовом ЛП $(\mathbf{C}[-1, 1], <.,.>)$ из упр.2.6.5(*г*).

Литература

Основная литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1981.-Ч.I.
2. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1984.-Ч.II.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного). – М.: Наука, 1969.-Ч.1-2.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного). – М.: Наука, 1970.-Ч.3.
6. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. – К.: Либідь, -1994.-Ч.2.
7. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
10. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982.

Дополнительная литература

11. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.
12. Дьедоне Ж.. Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964.
13. Шварц Л. Анализ. – М.: Мир, 1972.-Т.I.
14. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
15. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967.
16. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К.: Высш. шк., 1990.
17. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд. ИЛ,1962.
18. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.
19. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966.-Т.I.
20. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
21. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – М.: Высш. шк., 1979.
22. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций. – М.: Просвещение, 1981.
23. Треногин В.А., Писаревский Б.М. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Наука, 1984.
24. Дороговцев А.Я.Математический анализ: Сборник задач. – К.: Высш. шк., 1987.
25. Борисевич Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М.: Высш. шк., 1980.
26. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979.
27. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1964.

Указания к упражнениям

I. Метрические пространства.

1.1.1. [18], с.214. [21], с.9. Покажите, что выполняется равенство $\rho(x_1,y_1)=\rho(x_2,y_2)$ для любых $x_i\in\hat{x},\ y_i\in\hat{y}\ (i=1,2)$.

1.1.2. [4], с.71; [6], с.8.

1.1.3. [18], с.213. Положите в $(2')$ поочерёдно $x=y, x=z, y=z$.

1.1.5. В пункте (*д*) воспользуйтесь неравенством Минковского. [1], с.247-248; [5], с.50-51; [9], с.21, 23-25. В пункте (*е*) воспользуйтесь вогнутостью функции $f(t)=t^p, 0<p\le 1$, на $[0,+\infty)$.

1.1.6. В пункте (*г*) воспользуйтесь интегральным неравенством Минковского. [2], с.13-14; [8], с.52; [9], с.26-28. В пункте (*д*) воспользуйтесь вогнутостью функции $f(t)=t^p$, $0<p\le 1$, на $[0,+\infty)$.

1.1.7. В пункте (*г*) воспользуйтесь неравенством Минковского для рядов. [8], с.53; [10], с.31-32; [14], с.20-21, 27. В пункте (*д*) воспользуйтесь вогнутостью функции $f(t)=t^p,\quad 0<p\le 1$, на $[0,+\infty)$. В пункте (*е*) воспользуйтесь вогнутостью функции $f(t)=\frac{t}{1+t},\quad t\in[0,+\infty)$.

1.1.8. [2], с.14.

1.1.9-1.1.10. [7], с.223; [13], с.146-147.

1.1.11(*б*). Воспользуйтесь вогнутостью функции $f(t)=\operatorname{arctg} t,\ t\in[0,+\infty)$.

1.1.12. Докажите полуаддитивность функции $\varphi(t)$, то есть докажите, что при всех неотрицательных a и b выполняется неравенство $\varphi(a+b)\le\varphi(a)+\varphi(b)$.

1.2.1. Воспользуйтесь определением ограниченности множества и неравенством треугольника.

1.2.2. Отвечая на вопросы, поставленные в пункте (*а*), рассмотрите МП с дискретной метрикой.

1.2.6. Рассмотрите, напр имер, конечные множества на евклидовой плоскости как МП с индуцированной метрикой. По поводу вопроса пункта (*б)* см. также упр.1.2.7(*в*).

1.3.1. Утверждения (*а*) и (*б*) доказываются аналогично классическому случаю числовых последовательностей. В пункте (*в*) используйте неравенство четырёхугольника.

1.3.2. В пункте (в) рассмотрите, например, МП из упр.1.2.7(*г*) и МП, построенное на плоскости аналогично МП из упр. 1.2.7(*д*).

1.3.3. Воспользуйтесь непрерывностью арктангенса и обратной к нему функции.

1.3.4. Воспользуйтесь, например, метрикой ρ_1 или ρ_2 из упр.1.1.13.

1.3.5. Докажите, что при данных условиях на функцию $v=\varphi(u)$ существует промежуток $[0,\delta)$, на котором φ возрастает и непрерывна.

1.3.6. Нельзя неограниченную метрику оценить сверху ограниченной.

1.3.7. В одну сторону утверждение вытекает из определения предела и условия в правой части. В другую, исходя из того, что ρ_1 не слабее ρ_2, допустите противное и тогда $\exists U^{(2)}_{\varepsilon_0}(a)$ такой, что для $\forall n\in\mathbb{N}$ при $r_n=\frac{1}{n}$ $\exists x_n\in U^{(1)}_{r_n}(a): x_n\notin U^{(2)}_{\varepsilon_0}(a)$. Покажите, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к a относительно ρ_1, но не сходится к a относительно ρ_2, что противоречит предположению.

1.3.8. С учётом неравенств (1.2) утверждение (и в одну, и в другую сторону) достаточно доказать для какой-нибудь одной метрики. [4], с.83-84.

1.3.9. [10], с.27-28.

1.3.10. Достаточно рассмотреть случай $[a,b]=[0,1]$. Воспользуйтесь неравенствами (1.3)-(1.4) и рассмотрите последовательности функций $x_n(t)=t^n$ при $1\le p<q=\infty$ и $y_n(t)==n^{\frac{p}{q}}t^{n^p}$ при $1\le p<q<\infty$.

1.3.11. Воспользуйтесь неравенствами (1.5) и при $1\le p<q\le\infty$ рассмотрите последовательность точек $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}\subset l_1$, где $x^{(m)}=\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$, $m\in\mathbb{N}$, при этом $x_n^{(m)}=m^{-\frac{1}{p}}\ (1\le n\le m)$, $x_n^{(m)}=0\ (n>m)$.

1.3.12. [4], с.78.

1.4.1. (*к*) Воспользуйтесь тем, что $\ln n\uparrow\infty$ и $\ln(n+1)-\ln n\downarrow 0\ (n\to\infty)$. (*л*) [22], № 285, с.34, 139. (*м*) Воспользуйтесь результатами пункта (*л*) при $\alpha=2\pi$. (*н*) [22], № 164, с.24-25, 115.

1.4.2. Эквивалентность утверждений в пункте (*а*) доказывается непосредственным сравнением их формализованных записей. Аналогичные указания и в пункте (*б*), где для опровержения обратного утверждения рассмотрите изолированную точку.

1.4.3. (*б*) Для опровержения утверждения о предельных точках пересечения множеств, рассмотрите $A=[0,1)$ и $B=(1,2]$. (*в*) Пусть $\mathbb{Q}=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$. Рассмотрите семейство $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $A_n=\{a_n\}$. (*г*) В качестве контрпримера рассмотрите $A=\mathbb{N}$. (*д*) [22], № 159, с.24, 114. (*е*) Рассмотрите $A=(0,1)\cup\{2\}$. (*ж*)-(*з*) Для опровержения обратного включения в $\mathbb{R}$ рассмотрите $A=(0,1)\cup\{2\}$. Для опровержения прямого включения рассмотрите МП с дискретной метрикой.

1.4.4. (*г*) [22], № 152, с.24, 113. (*д*) Запишите разность в виде пересечения. (*е*) Покажите, что справедливо утверждение: $(U_\varepsilon(a)\subset A)\Rightarrow(\forall x\in U_\varepsilon(a):x\in\operatorname{Int}A)$. (*з*) [22], № 153, с.24, 113. (*и*) Рассмотрите $A=(0,2)$, $B=(1,3)$. (*к*) [22], № 152, с.24, 113.

1.4.6. (*в*) Покажите, что $(\operatorname{Fr}A)^c=\operatorname{Ext}(\operatorname{Fr}A)$. [22], № 170, с.25, 116. (*г*) Воспользуйтесь (*в*) для $A_1=\operatorname{Fr}A$ и докажите, что в силу $\operatorname{Fr}A_1\subset A_1$ выполняется $\operatorname{Int}(\operatorname{Fr}A_1)=\varnothing$. [22], № 170, с.25, 116. (*д*) Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}A)=\operatorname{Int}A$ и $\operatorname{Ext}(\operatorname{Int}A)\supset\operatorname{Ext}A$. (*е*) Воспользуйтесь (*б*) и (*г*). (*ж*) Покажите, что из $x\notin\operatorname{Fr}A$ и $x\notin\operatorname{Fr}B$ вытекает $x\notin\operatorname{Fr}(A\cup B)$. [22], № 157, с.24, 113. (*з*) Воспользуйтесь (*б*) и (*ж*). (*и*) Воспользуйтесь (*б*) и (*з*). (*к*) Используйте определения граничной точки множества и расстояния от точки до множества. (*л*) Рассмотрите $A=\mathbb{Q}$ и $B=\mathbb{R}$.

1.4.7. От противного: если $A\ne\varnothing$ и $A^c\ne\varnothing$, то для $a\in A$ и $b\in A^c$ покажите, что из $a<b$ вытекает $c=\sup\{x\in A\mid a\le x<b\}\in\operatorname{Fr}A$. Аналогичные рассуждения при $b<a$.

1.4.11. (*а*) [12], с.45-46; (*б*)-(*в*) [19], с.218-219.

1.5.1. (*а*) Воспользуйтесь упр.1.4.4(*е*). (*б*) Воспользуйтесь упр.1.4.10(*д*). (*в*) Воспользуйтесь упр.1.4.4(*в*). (*г*) Воспользуйтесь упр.1.4.10 (*в*). (*д*) Покажите, что для $\forall b\in U_\varepsilon(a)$ выполняется $U_\delta(b)\subset U_\varepsilon(a)$, где $\delta=\varepsilon-\rho(a,b)$. (*е*) Покажите, что $\forall b\notin K_\varepsilon(a)$ выполняется $U_\delta(b)\subset(K_\varepsilon(a))^c$, где $\delta=\rho(a,b)-\varepsilon$, то есть $\operatorname{Ext}(K_\varepsilon(a))=(K_\varepsilon(a))^c$. (*ж*) Покажите, что $\operatorname{Ext}(S_\varepsilon(a))=(S_\varepsilon(a))^c$.

1.5.2. [2], с.16; [4], с.79; [6], с.13-14.

1.5.3. Воспользуйтесь определениями открытых и замкнутых множеств и формулами (1.11).

1.5.4. Воспользуйтесь упр.1.5.2 и упр.1.5.3.

1.5.6. [4], с.79-80; [6], с.14-15.

1.5.7. (*а*)-(*в*) Воспользуйтесь определениями открытых и замкнутых множеств и формулами (1.9)-(1.10). (*г*) Воспользуйтесь (*в*) и упр.1.4.7. В качестве примера МП (Y,ρ_Y) можно взять, например, $Y=\{0,1\}$. (*е*) См. указание к упр.1.4.6(*в*) и докажите, что в силу $\operatorname{Fr}A\subset A$ выполняется $\operatorname{Int}(\operatorname{Fr}A)=\varnothing$. [22], № 170, с.25, 116.

1.5.8. (*а*) Покажите, что $(\rho(x,A)<\varepsilon)\Leftrightarrow(\exists a\in A:x\in U_\varepsilon(a))$. (*б*) Воспользуйтесь упр.1.5.1(*д*) и упр.1.5.2(*б*). (*в*) Воспользуйтесь упр.1.4.8(*г*). (*г*) Воспользуйтесь (*в*) и формулами (1.11).

1.5.9. Воспользуйтесь геометрическим критерием сравнимости метрик (упр.1.3.7).

1.5.10. (*а*) Воспользуйтесь упр.1.4.10(*б*) и упр.1.4.4(*в*). (*б*) Воспользуйтесь упр.1.4.4(*б*) и упр.1.4.10(*в*). Строгие включения в (*а*) и (*б*) имеют место. например, для $G=(0,1)\cup(1,2)$ и $F=[0,1]\cup\{2\}$. (*в*) – (*г*) [7], с.105-106; [21], с.33.

1.5.11. (*а*)-(*б*) [2], с.17; [22], № 193, с.27, 118. (в) В случае $G_1\ne\varnothing$ и $G_2\ne\varnothing$ положите $\hat{G}_1=\bigcup_{y\in G_1}U_{\varepsilon_y}(y)$ и $\hat{G}_2=\bigcup_{z\in G_2}U_{\delta_z}(z)$, где при $\forall y\in G_1$ и при $\forall z\in G_2$ шары $U_{\varepsilon_y}(y)$ и $U_{\delta_z}(z)$ рассматриваются в МП (X,ρ), а радиусы этих шаров выбраны следующим образом: $\varepsilon_y=\min\{\rho_Y(y,G_1^c),\frac{1}{2}\rho_Y(y,G_2)\}$, $\delta_z=\min\{\rho_Y(z,G_2^c),\frac{1}{2}\rho_Y(z,G_1)\}$.

1.5.12. (*а*) [22], № 203, с.27, 120. (*б*) Воспользуйтесь тем, что $G^c\in\mathfrak{F}$ и $G^c\cap F=\varnothing$.

1.5.13. [7], с.107-108; [21], с.218; [22], № 205, с.27, 120.

1.5.14. [19], с.223-224.

1.6.1. (*а*)-(*д*) Эквивалентность утверждений (*а*)-(*г*) вытекает из эквивалентности соответствующих утверждений в упр.1.4.8. Эквивалентность (*а*) и (*д*) следует непосредственно из определений. (*е*) Воспользуйтесь, например, (*г*).

1.6.2. См. упр.1.6.1 и упр.1.4.5(*е*).

1.6.3. (*а*) $\Rightarrow$ (*б*) Если $U_\delta(y)\cap A=\varnothing$, то $U_\delta(y)\cap\overline{A}=\varnothing$. (*б*) $\Rightarrow$ (*в*) Проверьте, что $\forall U_\varepsilon(x)\ \exists y\in\operatorname{Ext}A:\ y\in U_\varepsilon(x)$. (*в*) $\Rightarrow$ (*г*) Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{Int}\overline{A}=\operatorname{Ext}(\operatorname{Ext}A)$. (*г*) $\Rightarrow$ (*а*) Покажите, что $\forall U_\varepsilon(x)\exists y\in\operatorname{Ext}A:\ y\in U_\varepsilon(x)$, и учтите, что $\rho(y,A)>0$.

1.6.5. (*а*) В качестве контрпримера к обратному утверждению рассмотрите, например, $A=\mathbb{Q}$ в МП $\mathbb{R}$ с естественной метрикой. [22], № 264, с.32, 136. (*б*) Пусть $\mathbb{Q}=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$. Рассмотрите множества $A_n=\mathbb{Q}\setminus\{x_1,x_1,\ldots x_n\}$, $n\in\mathbb{N}$. [22], № 255, с.32, 135. (*в*) Если $G\in\mathfrak{G}$, то $G=\operatorname{Ext}(G^c)$. Воспользуйтесь пунктом (*в*) упр.1.6.3. [22], № 265, с.32, 136. (*г*) [22], № 266, с.33, 136. Счётным семейством с требуемыми свойствами является $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $A_n=\{x_n\}$, $\mathbb{Q}=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$. (В МП $\mathbb{R}$ с естественной метрикой.) (*д*) См. пункт (*г*). (*ж*) [22], № 256, с.32, 135. Искомые несчётные семейства существуют, например, в МП $\mathbb{R}$ с естественной метрикой. Введите отношение эквивалентности: $(x\sim y)\Leftrightarrow(x-y\in\mathbb{Q})$, после чего докажите, что семейство классов эквивалентностей удовлетворяет требуемым свойствам.

1.6.6. [22], №№ 107, 224, 225, с. 15, 29, 105, 125.

1.6.7. (*а*) Если $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, где A_n – нигде не плотные множества, то постройте такую систему вложенных отрезков $\{[\alpha_n,\beta_n]\}_{n=1}^{\infty}$, что $A_i\cap[\alpha_n,\beta_n]=\varnothing$ при $1\le i\le n$, и найдите точку, не принадлежащую ни одному множеству A_n, что противоречит предположению. (*б*) См. указания к пункту (*а*). (*в*)-(*г*) Являются следствиями (*а*). (*д*) Докажите, что у множества первой категории пустая внутренность. (*е*) Перейдите к дополнениям и воспользуйтесь утверждениями упр.1.6.5(*в*) и упр.1.6.7(*б*).

1.6.8. (*б*) Учитывая покоординатный характер сходимости в любой из рассматриваемых метрик (упр.1.3.8), докажите, что $\mathbb{Q}^n$ всюду плотно в $\mathbb{R}^n$. (*в*) Учитывая, что ρ_∞ не слабее любой другой метрики ρ_p $(0<p<\infty)$ в $\mathbf{C}[a,b]$ (см. неравенства в упр.1.1.6(*г*)-(*д*)), достаточно доказать сепарабельность МП $(\mathbf{C}[a,b],\rho_\infty)$, при этом достаточно рассмотреть случай $[a,b]=[0,1]$. Пользуясь равномерной непрерывностью $f\in\mathbf{C}[0,1]$, покажите, что всюду плотно множество кусочно-линейных функций, определённых на $[0,1]$, у которых рациональны координаты начала, конца и вершин ломаных, являющихся графиками этих функций. [7], с.152-154; [22], № 346, с.41, 152-153. (*г*) Докажите, что всюду плотным в каждом (l_p,ρ_p), $0<p<\infty$, является множество последовательностей с конечным числом отличных от нуля членов, которые при этом рациональны. [22], № 347, с.41, 153; [3], с.495. (*д*) Докажите, что всюду плотным в МП $(\mathcal{R}^p[a,b],\ \rho_p)$, $1\le p<\infty$, является множество $\mathbf{C}[a,b]$ ([2], с.536-537), и воспользуйтесь (*в*) и упр.1.6.1(*е*). (*е*) Докажите, что всюду плотным в МП (s,ρ_s) является множество последовательностей, описанное в указании к пункту (*г*). [10], с.47. (*ж*) См упр.1.6.4(*а*). (*з*) Рассмотрите в этом МП множество последовательностей, все члены которых равны нулю или единице, покажите его несчётность и докажите, что расстояние между любыми двумя различными элементами множества равно единице. [10], с.47; [8], с.58. (*и*) Докажите, что всюду плотным в МП (c,ρ_c) является множество последовательностей с рациональными членами, являющихся стационарными с некоторого номера. (*к*) Докажите, что всюду плотным в МП (c_0,ρ_{c_0}), является множество бесконечно малых последовательностей с рациональными членами, являющихся стационарными с некоторого номера. См. также упр.1.6.8(*и*) и упр.1.6.9(*а*).

1.6.9. (*а*) [22], № 352, с.41, 154. (*б*) Это утверждение есть следствие утверждения (*а*). [22], № 372, с.42, 160. (*в*) Воспользуйтесь упр.1.6.4(*а*). [22], № 372, с.42, 160.

1.7.1. (*а*) [4], с.100. (*б*) [4], с.100. (*в*) [7], с.220.

1.7.2. (*а*) Воспользуйтесь определениями фундаментальности и неравенством четырёхугольника из упр.1.1.2(*б*). (*б*) Воспользуйтесь определениями фундаментальности, сходимости числовой последовательности и неравенством из упр.1.1.2(*в*). (*в*) Воспользуйтесь (*б*).

1.7.3. (*б*) Для оценки угловой метрики из упр.1.1.11(*б*) используйте свойства вогнутой функции $\operatorname{arctg}u$ на $[0,\varepsilon_0]$.

1.7.4. (*а*) [4], с.103; [22], №№ 171-172, с.25, 116. (*б*) № 269, с.33, 137.

1.7.5. Воспользуйтесь покоординатным характером фундаментальности и сходимости в МП $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, $0<p\le\infty$, и полнотой $\mathbb{R}$ с естественной метрикой. [4], с.102; [7], с.220-221; [8], с.64-65. (*б*) [2], с.32; [8], с.65. (*в*) Для МП (l_2,ρ_2) см. [7], с.221-223; [8], с.65-66. Для МП (l_p,ρ_p), $0<p<\infty$, рассуждения аналогичны. Для МП (l_∞,ρ_∞) см. [10], с.34-35. См. также упр.1.7.6. (*г*) Руководствуйтесь идеями пункта (*в*) для (l_2,ρ_2). (*д*) – (*е*) Докажите, что (c,ρ_c) и (c_0,ρ_{c_0}) замкнутые подпространства в МП (l_∞,ρ_∞), и воспользуйтесь упр.1.7.4. [10], с.35. (*ж*) [2], с.33-34; [5], с.45-47; [8], с.66-67; [15], с.89-90.

1.7.6. [13], с.146-149, 150-152.

1.7.7. (*а*) Положите $\hat\rho(x,+\infty)=\frac{\pi}{2}$, $\hat\rho(x,-\infty)=\frac{\pi}{2}$ при $x\in\mathbb{R}$, $\hat\rho(-\infty,+\infty)=\pi$ и проверьте, что тем самым построено пополнение МП $(\mathbb{R},\rho)$. (*б*) Установите изометрическую эквивалентность МП, построенного в (*а*), и МП $([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\tilde\rho)$.

1.7.9. [3], с.507; [27], с.201.

1.7.10. Докажите, что оба условия носят покоординатный характер и установите их эквивалентность при $n=1$.

1.7.11. [4], с.105-106.

1.7.12. (*а*) От противного. Примените теорему Бэра к замкнутому шару, содержащемуся в рассматриваемом множестве. (*б*) [22], № 272, с.33, 137-138. (*в*) [21], с.248. (*г*) [22], № 249, с.32, 132.

1.7.13. Воспользуйтесь упр.1.6.4(*б*) и теоремой Бэра. [8], с.69.

1.7.14. [2], с.44-45; [6], с.40-41; [8], с.73; [10], с.42-43.

1.7.15. (*а*) Рассмотрите $f(x)=x+\operatorname{arcctg}x$ как отображение в себя МП $\mathbb{R}$ с естественной метрикой. (*б*) Рассмотрите $g(x)=0{,}5x$ в МП $X=(0,+\infty)$ с естественной метрикой и $h(x)=0{,}5x$ как отображение $X=[2,6]$ на $Y=[1,3]$ (оба МП с естественной метрикой).

1.7.16. (*а*) Покажите, что при $\forall t\in[0,\frac{1}{3}]$ выполняется $|\,y(t)-1\,|\le 1$ для $\forall x=x(t)\in\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}]$. (*б*) Воспользуйтесь тем, что $K_1(1)$ – полное МП с индуцированной метрикой. Продифференцируйте обе части равенства $x_0(t)=1+\int_0^t x_0(u)\,du$ и решите полученное дифференциальное уравнение.

1.7.17. Воспользуйтесь единственностью точки $x\in X$, удовлетворяющей уравнению $f(x)=x$, в равенстве $f(g(x))=g(f(x))$. Единственность неподвижной точки нарушается, например, для тождественного отображения g.

1.7.18. Покажите, что $f(K_r(a))\subset K_r(a)$, и примените теорему Банаха.

1.7.19. С помощью теоремы Лагранжа покажите, что f удовлетворяет условию Липшица с константой $L\in[0,1)$.

1.7.20. Примените теорему Больцано-Коши к функции $g(x)=f(x)-x$ на отрезке $[a,b]$.

1.8.1. Переформулируйте определение компактного МП, используя двойственные свойства открытых и замкнутых множеств.

1.8.4. (*а*) Воспользуйтесь упр.1.5.11. (*б*) [4], с.113-114; [6], с.28-29; [22], № 303, с.37, 144. В качестве некомпактного ограниченного и замкнутого множества рассмотрите, например, любое бесконечное множество в дискретном МП. (*в*) [6], с.29; [22], № 305, с.37, 144. (*г*) [22], № 312, с.38, 145. Рассмотрите счётное семейство компактов $\{[-n,n]\}_{n=1}^{\infty}$ в МП $\mathbb{R}$ с естественной метрикой. (*д*) [22], № 313, с.38, 145. (*е*) [22], № 314, с.38, 145-146. (*ж*) [2], с.26; [10], с.49; [22], № 317, с.38, 146.

1.8.5. [4], с.113; [7], с.220-221; [22], № 316, с.38, 146.

1.8.6. Переформулируйте критерий Хаусдорфа в терминах некомпактности МП.

1.8.7. Убедитесь, что на $Y=\{x=(x_1,x_2):x_2=0\}\subset X$ индуцируется естественная метрика, а к L примените критерий некомпактности из упр.1.8.6.

1.8.9. Примените критерий Хаусдорфа. [7], с.232; [8], с.102-103.

1.8.10. [7], с.192; [10], с.53; [22], № 350, с.41, 154.

1.8.11. (*а*) Достаточно доказать некомпактность $K_1(0)$ в $(\mathbf{C}[0,1],\rho_\infty)$. Для этого воспользуйтесь упр.1.8.6 и рассмотрите последовательность $x_n(t)=\sin(2^n\pi t)$. (*б*) Достаточно доказать некомпактность $K_1(0)$ в (l_p,ρ_p), $0<p\le\infty$, где 0 (центр шара) – нулевая последовательность. Для этого воспользуйтесь упр.1.8.6 и рассмотрите последовательность $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset K_1(0)$, где $x^{(n)}=\{x_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$, $x_m^{(n)}=1$ при $n=m$ и $x_m^{(n)}=0$ при $n\ne m$. [22], №№ 309-310, с.38, 145.

1.8.12. [7], с.189-190; [21], с.236-237.

1.8.13. Из компактности, очевидно, следует счётная компактность. В другую сторону докажите сначала, что счётно-компактное МП вполне ограничено, а, значит, сепарабельно. После этого докажите, что из любого открытого покрытия можно выделить не более чем счётное подпокрытие. [8], с.103; [21], с.238-239.

1.8.14. (*а*) Воспользуйтесь критерием Больцано-Вейерштрасса и покоординатным характером ограниченности и сходимости последовательностей в МП $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$. (*б*) вытекает из (*а*).

1.8.16. Покажите, что семейство не является равностепенно непрерывным.

1.9.1 – 1.9.4. Доказательства этих утверждений ничем принципиально не отличается от доказательств в частном случае числовых функций числового аргумента.

1.9.5. [20], с.57-59; [21], с.58-60.

1.9.6. (*а*) Воспользуйтесь неравенством (*а*) из упр.1.1.2. (*б*) Воспользуйтесь неравенством (*а*) из упр.1.4.11.

1.9.7. Утверждения непосредственно вытекают из определений сравнения метрик и непрерывности в смысле Гейне отображений, действующих из одного МП в другое МП.

1.9.8. (*а*) Рассмотрите функцию $f(x) = \rho(x, F)$. (б) Рассмотрите функцию $f(x) = \rho(x, G^c)$. Воспользуйтесь тем, что $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\mathbb{R}\backslash\{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}((-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, +\infty))$, и упр.1.9.5.

(*в*) Рассмотрите функцию $f(x) = \dfrac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}$.

1.9.9. (*а*)$\Rightarrow$(*б*) Вытекает непосредственно из определений равномерной непрерывности *f* и предела числовой последовательности. (*б*)$\Rightarrow$(*а*) От противного. Запишите отрицание свойства равномерной непрерывности *f* в терминах "ε-δ" и, взяв $\delta = \frac{1}{n}$, выделите две последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{x''_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(x'_n, x''_n) = 0$. Покажите, что невозможно выполнение равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_Y(f(x'_n), f(x''_n)) = 0$.

1.9.11. (*б*) См. указания к упр.1.9.6.

1.9.12. При $p = 1$ или $p = \infty$ воспользуйтесь простейшими оценками модуля интеграла, а при $1 < p < \infty$ используйте интегральное неравенство Гёльдера для получения условия Липшица на функционал *f*. (См. упр.1.9.11(*а*).)

1.9.13. В одну сторону утверждения (*а*) и (*б*) – первая и вторая теоремы Вейерштрасса. В другую –от противного. Если (X, ρ) – не компактное и не полное МП, то, не нарушая общности, можем считать (X, ρ) собственным подпространством своего пополнения $(\hat{X}, \hat{\rho})$. Но тогда существует такая точка $a \in \hat{X} \setminus X$. что $a \in X'$, и, значит, функция $f(x) = \dfrac{1}{\rho(x, a)} \in C(X)$ не ограничена сверху. Если же (X, ρ) – не компактное, но полное МП, то в нём найдётся "растопыренная" последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. (Упр.1.8.6.) Воспользуйтесь упр.1.9.8(*в*) и постройте такую $f \in C(X)$, что $f(x_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. [23], см. указание к задаче № 15.23.

1.9.14. Примените теорему о непрерывности обратного отображения в МП.

1.9.15. (*а*) – частный случай (*б*). Доказав замкнутость $C(X, Y)$ в МП (B, ρ_B), воспользуйтесь упр.1.7.4(*а*) и упр.1.7.6.

1.9.16. (*а*) Воспользуйтесь упр.1.9.6(*а*) и второй теоремой Вейерштрасса. [22], № 520, с.60, 192. (*б*) Докажите, что $\rho(K_1, K_2) = \inf\limits_{x \in K_2} \rho(x, K_1)$, и воспользуйтесь упр.1.9.6(*б*) и второй теоремой Вейерштрасса. [22], № 524, с.61, 193. (*в*) Воспользуйтесь упр.1.3.1(*в*), 1.3.12, 1.8.4(*е*) и второй теоремой Вейерштрасса.

1.9.17. Докажите. что функция $g(x) = \rho(x, f(x)) \in C(X)$ и в единственной точке минимума на *X* принимает нулевое значение. [24], № X.5.11, с.194, 375.

1.9.18. Поскольку неподвижная точка, если, конечно, она существует, принадлежит $f(X)$, то с учётом того, что $f(f(X)) \subset f(X)$, воспользуйтесь упр.1.9.17 для сужения *f* на $f(X)$.

1.9.19. Пусть $a \in X$, $b \in X$ и $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_n = f(a_{n-1})$, $b_n = f(b_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательности соответствующих итераций. В силу компактности МП существуют $c \in X$, $d \in X$ и подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = c$ и $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = d$. Тогда с учётом неубывания последовательности $\{\rho(a_n, b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(c, d)$. Не нарушая общности, можно считать, что $\lim\limits_{k\to\infty}(n_{k+1} - n_k) = +\infty$. Из $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) = 0$ в силу сжимаемости обратного отображения f^{-1} вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(a_{n_{k+1}-n_k}, a) = 0$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_{k+1}-n_k} = a$. Аналогично $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_{k+1}-n_k} = b$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(a, b)$, откуда следует стационарность последовательности $\{\rho(a_n, b_n)\}_{n=0}^{\infty}$, а, значит, изометричность *f*. Для доказательства сюръективности *f* предположите противное и докажите, что для любого $a \in X \setminus f(X)$ последовательность итераций $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, является "растопыренной", что противоречит компактности.

1.10.1. (*а*) [7], с.121; [13], с.88-89;[22], №№ 394-395, с.43-44, 163. (*б*) Воспользуйтесь тем, что в дискретном МП все множества открыто-замкнутые.

1.10.2. (*а*) Воспользуйтесь тем, что дополнение открытого (замкнутого) множества замкнуто (открыто). [22], № 378, с.42, 160. (*б*) (1)$\Rightarrow$(2). Рассмотрите сначала случай $X = Y \cup Z$, обозначьте $G_1 = (\overline{Z})^c$, $G_2 = (\overline{Y})^c$ и докажите, что $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. В случае $X \neq Y \cup Z$, выбрав таким же образом открытые множества $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$ в подпространстве $W = Y \cup Z$, постройте G_1 и G_2 с требуемыми свойствами в МП (X, ρ). (См. упр.1.5.11(*в*).) (2)$\Rightarrow$(1) вытекает из замкнутости дополнения открытого множества. (*в*) Вытекает из (*б*).

1.10.3. Переформулируйте определение связного подпространства в терминах отделённых множеств. [20], с.519.

1.10.4. (*а*) Если (X, ρ) несвязно и $X = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 \neq \varnothing$, $G_1 \neq \varnothing$, где $G_i\ (i = 1, 2)$ – открытые множества, то докажите, что для точек $a \in G_1$ и $b \in G_2$ не существует содержащего их связного множества в этом МП. В другую сторону утверждение тривиально. [21], с.285. (*б*) [21], с.285. (*в*) [21], с.285; [22], № 383, с.43, 161. (*г*) [21], с.285-286; [22], № 401, с.44, 165.

1.10.5. В одну сторону – это теорема Больцано-Коши. Для доказательства в другую сторону постройте на несвязном МП функцию $f \in C(X)$, принимающую только два значения.

1.10.6. [22], № 399, с.44, 164.

1.10.7. (*а*) Воспользуйтесь упр.1.10.4(*в*) – (*г*). (*б*) [21], с.287.

1.10.9. Воспользуйтесь упр.1.10.4(*а*). [21], с.292.

1.10.10. См. упр.1.10.1.

1.10.11. Композиция пути в МП X и отображения f есть путь в МП Y.

1.10.12. [21], с.292; [22], № 581, с.68, 206.

II. Линейные нормированные пространства.

2.1.1. [15], с.355-356; [16], с.172-173.

2.1.5. (*в*) Метрики ρ_p, $0 < p < 1$, не обладают свойством абсолютной однородности.

2.1.6. (*в*) Метрики ρ_p, $0 < p < 1$, не обладают свойством абсолютной однородности. (*г*) Метрика ρ_s ограничена. (См. упр.2.1.3.)

2.1.7. (*в*) Метрики ρ_p, $0 < p < 1$, не обладают свойством абсолютной однородности.

2.1.8. Воспользуйтесь упр.2.1.1 и результатами из упр.1.1.8.

2.1.10. (*а*) – (*б*) Докажите, что подпространством, на котором вырождаются эти полунормы, является подпространство постоянных функций.

2.2.1. (*в*) $K_r(a) \supset \operatorname{co}(S_r(a))$ в силу выпуклости шара $K_r(a)$. Включение $K_r(a) \subset \operatorname{co}(S_r(a))$ вытекает того, что каждая точка шара лежит на отрезке с концами в противоположных точках сферы.

2.2.2. Проверьте выпуклость множества в правой части равенства и его включение в любое выпуклое множество, содержащее A. [5], с.88-89.

2.2.3. (*в*) Если $\| a \| = 0$ и $a \neq 0$, то в B лежит прямая, проходящая через a и точку $x = 0$.

2.2.4. (*а*) [5], с.52-53. (*б*) Покажите, что не выполняется аксиома треугольника. Для этого покажите, что $\|x\|_p + \|y\|_p < \|x+y\|_p$, если: 1) $x = (1,0,\ldots,0)$, $y = (0,1,0,\ldots,0)$; 2) $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_1 = y_2 = 1$, $x_n = 0\ (n \neq 1)$, $y_n = 0\ (n \neq 2)$; 3) (для $[a,b] = [-1,1]$) $:= x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t) = \dfrac{1}{2}(|t| + t)$, $y(t) = \dfrac{1}{2}(|t| - t)$.

2.2.5. [5], с.55-56; [8], с.132-133; [26], с.53.

2.2.6. Докажите, что из $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ в ЛНП $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, где $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset c$, $x^{(n)} = \{x_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m^{(n)} = a^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, $x = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, вытекает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$.

2.2.7. (б) Покажите замкнутость любого подпространства в конечномерном ЛНП и невозможность включения в собственное подпространство шара с центром в точке $x = 0$.

2.2.8. (*а*) [26], № 259(*а*), с.208, 313. (*б*) [26], № 259(*б*), с.208, 313. (*в*) Рассмотрите множества $F_1 = \{n + \dfrac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ и $F_2 = \mathbb{Z}$. (*г*) Докажите гомеоморфность отображения $f(x) = \lambda x$, $x \in X$. (*д*) Рассмотрите декартов квадрат $C^2 = C \times C \subset \mathbb{R}^2$ и докажите, что C^2 пересекается с каждой прямой вида $x + y = a\ (0 \le a \le 2)$.

2.3.1. Если выполнена предлагаемая оценка, то, очевидно, норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|\cdot\|_2$. Обратно, если норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|\cdot\|_2$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : (\|x\|_1 \le \delta_\varepsilon) \Rightarrow (\|x\|_2 < \varepsilon).$$

(Доказательство этого утверждения несложно провести от противного.) Но тогда в силу абсолютной однородности нормы при всех $x \in X$ выполняется оценка: $\|x\|_2 < \dfrac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\|x\|_1$.

2.3.3. (*а*) Утверждение $\exists C > 0\ \forall x \in X : \|x\|_2 \le C\|x\|_1$ равносильно утверждению

$$\exists C > 0\ \forall r > 0 :\ U_r^{(1)}(0) \subset U_{Cr}^{(2)}(0),$$

где $U_r^{(i)}(0)$ – шар в ЛНП $(X, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1,2)$. (*б*) Вытекает из (*а*) и эквивалентности норм в конечномерном ЛНП.

2.3.6. $\forall x \in X : \|x\|^{\sim} \le \|x\|^{\wedge} \le \|x\| \le 2\|x\|^{\sim}$.

2.4.1. Воспользуйтесь упр.1.3.1 и докажите, что в этих ЛНП один и тот же класс фундаментальных последовательностей.

2.4.3. Вытекает из упр.1.7.4(*а*).

2.4.4. Докажите, что для $C_b(\mathbb{R})$ и $C_0(\mathbb{R})$ это так, а для $C_c(\mathbb{R})$ – нет, рассмотрев последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c(\mathbb{R})$, где $x_n(t) = \varphi(t)$ при $-n\pi \le t \le n\pi$ и $x_n(t) = 0$ при $|t| \ge n\pi$, а $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ при $t \neq 0$ и $\varphi(0) = 1$.

2.4.6. В конечномерном случае сфера – замкнутое подмножество компакта (замкнутого шара). В бесконечномерном случае, рассуждая от противного, покажите с помощью критерия Больцано-Вейерштрасса компактность замкнутого шара, что противоречит теореме Рисса.

2.4.7. Учитывая, что ЛНП $(c, \|\cdot\|_c)$ и $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ банаховы (упр.2.2.6 и упр.2.4.3), докажите, что сформулированные условия равносильны полной ограниченности множества K. Для этого, в одну сторону, используйте относительную компактность множества $E = \{a^{(\alpha)} : \alpha \in A\}$ в $\mathbb{R}$ с естественной нормой и при каждом $\varepsilon > 0$ ищите конечную ε-сеть, состоящую из последовательностей, стационарных с некоторого номера. В другую сторону, исходя из относительной компактности K и предположив противное, стройте "растопыренную" последовательность. (См. упр.1.8.6.)

2.4.8. (*а*) Любые две точки непустого выпуклого множества в ЛНП соединимы отрезком с концами в этих точках. Покажите, что отрезок – носитель некоторого пути. (б) Открытые и замкнутые шары – непустые выпуклые множества (упр.2.2.3). В одномерном ЛНП сфера несвязна, а если размерность ЛНП больше единицы , то для любых двух точек сферы рассмотрите двумерное подпространство, в котором они содержатся, и воспользуйтесь выпуклостью двумерного замкнутого шара и непрерывностью нормы. Для МП рассмотрите случай дискретного МП.

2.5.2. Воспользуйтесь эквивалентностью непрерывности и ограниченности линейного оператора.

2.5.3. Докажите ограниченность линейного оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, выбрав какой-нибудь базис в X и используя эквивалентность нормы $\|\cdot\|_X$ и чебышёвской нормы относительно выбранного базиса. (См. упр.2.3.2 (1).)

2.5.4. [15], с.216-219; [16], с.247.

2.5.5. (*а*) Для доказательства ограниченности функционала воспользуйтесь интегральным неравенством Гёльдера при $1 < p < \infty$ и простейшими оценками модуля интеграла при $p = 1$ и $p = \infty$. При вычислении нормы учтите, что равенства в этих оценках достигаются на постоянных функциях. (*б*) Достаточно рассмотреть $[a,b] = [0,1]$ и последовательность функций $x_n = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.5.7. Для всякого $x \in \hat{X}$ и любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, определите Ax посредством равенства $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$, докажите корректность этого определения, линейность и ограниченность построенного оператора и единственность этого продолжения оператора A. [15], с.211-212.

2.6.2. (*а*) Воспользуйтесь упр.2.6.1(*г*). (*б*) Рассмотрите, например, ЛНП ($\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_1$) и векторы $x = (0,1)$, $y = (1,0)$.

2.6.3. При $a = b = 0$ утверждение следует из неравенства КБШ. Общий случай сводится к рассмотренному заменой переменных $x = a + u$, $y = b + v$. [9], с.46; [10], с.80.

2.6.4. (*а*) Проверяется непосредственным вычислением. (*б*) [8], с.160-161. (*в*) Воспользуйтесь "тождеством параллелограмма".

2.6.5. Полнота ЛНП из (*а*)-(*в*) и неполнота (*г*) рассматривались в упр.1.7.5. По поводу неполноты ЛНП из (*д*) см. замечание к упр.1.7.5. По поводу плотности ЛП ($\mathbf{C}[a,b]$, <.,.>) в ЛП ($\mathcal{R}^2[a,b]$, < . , . >) см. указания к упр.1.6.8(*д*).

2.6.6. Достаточно рассмотреть $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Проверьте, что "тождество параллелограмма" не выполняется для векторов (функций) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$. [8], с.162.

2.6.7. Утверждение при $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ проверяется непосредственным расписыванием скалярного произведения $< x + y, x + y >$. При $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ аналогичную процедуру одновременно проделайте для $< x + iy, x + iy >$.

2.6.8. [5], с.146; [8], с.156; [15], с.154-155.

2.6.9. [18], с.20-22.

2.6.10. [10], с.80-81; [15], с.156-159; [18], с.22-23.

2.6.11. (*а*) Воспользуйтесь 2.6.10(*а*). (*б*) Найдите связь между сходимостью последовательности в $Y \oplus Z$ и сходимостями последовательностей её проекций на Y и Z. (*в*) Покажите, что $W \ominus Y = W \cap Y^{\perp}$.

2.6.13. [15], с.35-36, 161.

2.6.14. [2], с.494-495;[5], с.206-207;[8], с.148-149;[15], с.167-168.

2.6.15. [2], с.492-493; [8], с.146-147; [15], с.165-166; [18], с.26-27.

2.6.16. [2], с.505-506.

2.6.17. (*а*) Сначала заданную ОНС расширьте до не более чем счётной всюду плотной в пространстве системы векторов, затем выделите из неё линейно независимую подсистему со всюду плотной в пространстве линейной оболочкой (сохранив в её составе исходную ОНС) и, наконец, воспользуйтесь процессом ортогонализации. (*б*) Для ГП постройте ортонормированный базис в ортогональном дополнении к заданной ОНС и объедините его с исходной ОНС. Для случая предгильбертового пространства воспользуйтесь 2.6.16.

2.6.19. [2], с.493.

Для успешного выполнения зачётного задания необходимо ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАЧЁТНЫЕ ЗАДАНИЯ

В каждом варианте выполняются следующие упражнения:

1) Является ли метрикой на множестве X функция $\rho(x,y)$? Если это так, то проверить полноту порождаемого ею метрического пространства.

2) Является ли данная последовательность в метрических пространствах (X,ρ), $(\hat{X},\hat{\rho})$, $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ фундаментальной? Сходящейся? (В тех вариантах, где в качестве $X, \hat{X}$ или $\widetilde{X}$ встречаются $\mathbf{C}[\alpha,\beta]$, $\mathbf{C}_b[\alpha,+\infty)$, $\mathbf{C}_b(-\infty,\beta]$, $\mathbf{C}_b(-\infty,+\infty)$ или их подмножества без указания соответствующей метрики, рассмотреть пространства непрерывных и ограниченных функций, определённых на соответствующем промежутке, с равномерной метрикой $\rho_\infty(x,y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$ в качестве $\rho, \hat{\rho}$ или $\widetilde{\rho}$ соответственно.)

3) Верно ли, что $x \in U_r(y)$? (Если заданы $[\alpha,\beta], x(t)$ и $y(t)$, то рассмотреть пространство ($\mathbf{C}[\alpha,\beta], \rho_1$) с метрикой $\rho_1(x,y) = \int_\alpha^\beta |x(t) - y(t)|\,dt$; если же заданы $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, то рассмотреть пространство ограниченных числовых последовательностей (l_∞, ρ_∞) с метрикой $\rho_\infty(x,y) = \sup_{n \in \mathrm{N}} |x_n - y_n|$.)

4) Является ли ограниченным множество A в соответствующем МП из формулировки упражнения 3)?

5) Доказать, что для отображения $\mathbf{C}[\alpha,\beta] \ni x \xrightarrow{f} y \in \mathbf{C}[\alpha,\beta]$, где $x = x(t) \in \mathbf{C}[\alpha,\beta]$, а $y = y(t)$ – функция, сопоставленная функции $x(t)$ посредством данной формулы:

(*а*) имеет место включение $f(K_1(c)) \subset K_1(c)$, где $K_1(c)$ – замкнутый шар единичного радиуса в метрическом пространстве ($\mathbf{C}[\alpha,\beta], \rho_\infty$), а $c = c(t)$ – постоянная на $[a,b]$ функция;

(*б*) согласно теореме Банаха существует единственная в $K_1(c)$ неподвижная точка x_0 отображения *f*.

Найти эту точку, непосредственной проверкой убедиться в её неподвижности и справедливости включения $x_0 \in K_1(c)$. Дать иллюстрацию этого включения, выбрав подходящие масштабы на осях координат.

№ 1

1) $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. 2) $x_n(t) = t^n$; $X = \mathbf{C}[0,1]$; $\hat{X} = \mathbf{C}[0,1]$, $\hat{\rho}(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt$; $\widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \forall t : x(t) > 0\} \subset \mathbf{C}[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. 3) $[0, \frac{\pi}{2}]$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $r = 1$.

4) $A = \{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty : (x_n^{(k)} = n^k e^{-kn}) \wedge (k \in [0,+\infty)\}$. 5) $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{5}$, $c = 1$, $y(t) = 1 + \int_0^t x^2(s)\,ds$.

№ 2

1) X – множество прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$, не проходящих через точку (0,0). Если прямые l_1 и l_2 задать уравнениями $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0\ (p_1 > 0, p_2 > 0)$ соответственно, то $\rho(l_1, l_2) = \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2}$.

2) $x_n(t) = \cos\frac{t}{n},\ X = \mathbf{C}_b(\mathbb{R}),\ \hat{X} = \mathbf{C}[0,1],\ \widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \forall t : x(t) < 1\} \subset \mathbf{C}[1,2]$.

3) $[0,\pi],\ x(t) = \frac{2t}{\pi},\ y(t) = \sin t,\ r = \frac{3}{2}$. 4) $A = \{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} : (x_n^{(k)} = \frac{\ln(kn)}{kn}) \wedge (k \in (1,+\infty)\}$.

5) $\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ c = \frac{3\pi}{2},\ y(t) = \frac{3\pi}{2} - \int\limits_0^t \sin x^2(s)\, ds$.

№ 3

1) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |e^x - e^y|$. 2) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = \operatorname{sgn}|x - y|;\ \hat{X} = \mathbb{R},\ \hat{\rho}(x,y) = |x - y|;\ \widetilde{X} = \mathbb{Q},\ \widetilde{\rho}(x,y) = |x - y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+5}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r = 1$.

4) $[\alpha,\beta] = [2,3],\quad A = \{x_k(t) : (x_k(t) = \frac{\ln(kt)}{kt}) \wedge (k \in [1,2])\}$. 5) $\alpha = -\frac{1}{9},\ \beta = 0,\ c = 0,\ y(t) = t - 4\int\limits_0^t \sin x^2(s)\, ds$.

№ 4

1) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = \operatorname{arsh}|x - y|$. 2) $x_n(t) = t^n - t^{2n};\ X = \mathbf{C}[0,1];\ \hat{X} = \mathbf{C}[0,1],\ \hat{\rho}(x,y) = \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt;\ \widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \forall t : x(t) > 0\} \subset \mathbf{C}[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. 3) $[\frac{1}{e}, e],\ x(t) = \ln t,\ y(t) = \frac{4\ln t}{t},\ r = \frac{5}{2}$.

4) $A = \{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} : (x_n^{(k)} = \frac{kn}{k^2 n^2 + 1}) \wedge (k \in (0,+\infty)\}$. 5) $\alpha = \pi,\ \beta = 2\sqrt{3},\ c = 0,\ y(t) = \int\limits_{\pi}^t \sqrt{4 - x^2(s)}\, ds$.

№ 5

1) $X = (0, \frac{\pi}{2}),\ \rho(x,y) = \sin|x - y|$. 2) $x_n(t) = \sqrt[3]{t^2 + e^{-n}};\ X = \mathbf{C}[-1,1],\ \rho(x,y) = \operatorname{sgn} \max\limits_{-1 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|;\ \hat{X} = \mathbf{C}[-1,1];\ \widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \forall t : \exists x'(t) \in \mathbb{R}\} \subset \mathbf{C}[-1,1]$.

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sin\frac{\pi}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r = \frac{4}{5}$. 4) $[\alpha,\beta] = [0,1]$,

$A = \{x_k(t) : (x_k(t) = \frac{k^t + t^k}{k^{t^2} + t^{k^2}}) \wedge (k \in (0,1])\}$. 5) $\alpha = \frac{4}{5},\ \beta = \sqrt{\frac{\pi}{4}},\ c = 1,\ y(t) = 1 + t^2 - \frac{\pi}{4} + 2\int\limits_{\beta}^t s x^2(s)\, ds$.

№ 6

1) $X = \mathbb{R},\quad \rho(x,y) = |\operatorname{th} x - \operatorname{th} y|$. 2) $x_n(t) = \frac{t^2}{n^2 + t^2},\ X = \mathbf{C}_b(\mathbb{R}),\ \hat{X} = \mathbf{C}[-1,1],\ \widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \exists t : x(t) \neq 0\} \subset \mathbf{C}[0,2]$. 3) $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}],\ x(t) = \frac{4}{4 - t^2},\ y(t) = \frac{4}{3t},\ r = \ln\frac{3}{2}$.

4) $A = \{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} : (x_n^{(k)} = \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{(mk)!}) \wedge (k \in \mathbb{N})\}$. 5) $\alpha = \pi,\ \beta = \frac{21\pi}{10},\ c = 0,\ y(t) = 4(t - \pi) + \int\limits_{\pi}^t x^2(s)\, ds$.

№ 7

1) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, где $f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$. 2) $x_n(t) = \sin\frac{t}{n},\ X = \mathbf{C}_b(\mathbb{R}),\ \hat{X} = \mathbf{C}[0,1],\ \widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \forall t : x(t) \neq 0\} \subset \mathbf{C}[\frac{1}{2}, 1]$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{7}{3} + \frac{(-1)^n + 1}{4n}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r = \frac{3}{8}$. 4) $[\alpha,\beta] = [0,2],\ A = \{x_k(t) : x_k(t) = t^k e^{-kt},\ k \in (0,+\infty)\}$. 5) $\alpha = 0,\ \beta = \frac{3}{4},\ c = \pi,\ y(t) = \pi + \int\limits_0^t \cos x^2(s)\, ds$.

№ 8

1) X – множество прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$, не проходящих через точку (0,0). Если прямые l_1 и l_2 задать уравнениями $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0\ (p_1 > 0, p_2 > 0)$ соответственно, то $\rho(l_1, l_2) = |p_1 - p_2| + |\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2| + |\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2|$.

2) $x_n(t) = e^{-n|t|};\ X = \mathbf{C}[-1,1];\ \hat{X} = \mathbf{C}[-1,1],\ \hat{\rho}(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} |x(t) - y(t)|\, dt;\ \widetilde{X} = \{x = x(t) \mid \exists t : x(t) > 0\} \subset \mathbf{C}_b[1,+\infty)$. 3) $[0,\pi],\ x(t) = \frac{4}{\pi^2}t^2,\ y(t) = \sin t,\ r = 3$.

4) $A = \{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} : (x_n^{(k)} = \frac{(nk+1)^{nk+1}(nk+2)^{nk+2}}{(nk+3)^{2nk+3}}) \wedge (k \in (0,+\infty))\}$.

5) $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{3},\ c=\frac{3}{2},\ y(t)=\frac{3}{2}-\int\limits_0^t\sqrt{9-x^2(s)}\,ds.$

№ 9

1) $X=\mathbb{R}^2,\ \rho(x,y)=\sqrt[3]{|x_1-y_1|}+|x_2-y_2|$, где $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$. 2) $x_n=n(\sqrt{n^2+1}-n)$; $X=\mathbb{R},\ \rho(x,y)=\operatorname{sgn}|x-y|;\ \hat{X}=\mathbb{R},\ \hat{\rho}(x,y)=|x-y|;\ \widetilde{X}=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ \widetilde{\rho}(x,y)=|x-y|.$

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{3n^2+5}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{3+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r=\frac{6}{5}.$

4) $[\alpha,\beta]=[0,\frac{\pi}{2}],\ A=\{x_k(t):(x_k(t)=\cos^k\frac{2\pi kt}{t+1})\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=1,\ \beta=\frac{10}{9},\ c=1,\ y(t)=$ $=1+4\int\limits_1^t x(s)\frac{ds}{s}.$

№ 10

1) $X=\mathbb{R},\ \rho(x,y)=\frac{|x-y|}{1+2|x-y|}$. 2) $x_n(t)=t^n-t^{2n},\ X=\mathbf{C}[0,1],\ \hat{X}=\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}],$ $\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\exists t: x(t)\neq 0\}\subset\mathbf{C}[0,\frac{1}{2}]$. 3) $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}],\ x(t)=\frac{1}{\sin^2 t},\ y(t)=\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}},\ r=\frac{2}{5}.$

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=\frac{k^2n^2}{1+k^3n^3})\wedge(k\in(0,+\infty))\}$. 5) $\alpha=-1,\ \beta=-\frac{12}{13},\ c=-1,\ y(t)=-1-$ $-3\int\limits_{-1}^t s^2x^2(s)\,ds.$

№ 11

1) $X=[e,+\infty),\ \rho(x,y)=\left|\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln y}{y}\right|$. 2) $x_n=\sqrt[n+1]{2};\ X=(1,2],\ \rho(x,y)=|\log_x 2-\log_y 2|;$ $\hat{X}=[1,2],\ \hat{\rho}(x,y)=|x-y|;\ \widetilde{X}=[1,2]\backslash\mathbb{Q},\ \widetilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{2}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty},$ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r=\sqrt{2}$. 4) $[\alpha,\beta]=[2,3],\ A=\{x_k(t):(x_k(t)=\sqrt{kt+\sin^3 kt})\wedge$ $\wedge(k\in[0,1])\}$. 5) $\alpha=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{4\pi}{7},\ c=0,\ y(t)=2\int\limits_\alpha^t\sqrt{4-x^2(s)}\,ds.$

№ 12

1) $X=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ \rho(x,y)=\frac{\sin|x-y|}{\cos x\cos y}$. 2) $x_n(t)=\frac{n^2}{n^2+t^2};\ X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R}),\ \hat{X}=\mathbf{C}[-1,1],$ $\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\forall t: x(t)<1\}\subset\mathbf{C}[1,2]$. 3) $[\frac{\pi}{2},\pi],\ x(t)=\cos 2t,\ y(t)=\cos t,\ r=\frac{3}{2}.$

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n)\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=\frac{4}{5},\beta=1,c=-1,y(t)=-1+\int\limits_1^t x^2(s)\,ds.$

№ 13

1) $X=\mathbb{R},\ \rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где $f(t)=\frac{t}{1+|t|}$. 2) $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n}};\ X=\mathbf{C}[-1,1],\ \rho(x,y)=$ $=\operatorname{sgn}\max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)-y(t)|;\ \hat{X}=\mathbf{C}[-1,1];\ \widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\forall t:\exists x'(t)\in\mathbb{R}\}\subset\mathbf{C}[-1,1].$

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{(1+n)^{(-1)^n-1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi n}{4n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r=\frac{\pi}{6}$. 4) $[\alpha,\beta]=[0,1],$ $A=\{x_k(t):(x_k(t)=\frac{t}{(t-k)^2+1})\wedge(k\in[0,+\infty))\}$. 5) $\alpha=1,\beta=\sqrt{3},\ c=\frac{\pi}{4},\ y(t)=\frac{\pi}{4}+$ $+\int\limits_1^t\cos x^2(s)\,ds.$

№ 14

1) $X=\mathbb{R},\rho(x,y)=\ln(1+|x-y|)$. 2) $x_n(t)=\operatorname{arctg}(t-n);\ X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R}),\ \hat{X}=\mathbf{C}_b(-\infty,0],$ $\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\exists t: x(t)>-\frac{\pi}{2}\}\subset\mathbf{C}[0,1]$. 3) $[\frac{1}{2},2],\ x(t)=\frac{1}{t\sqrt{3}},\ y(t)=\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{3},\ r=\frac{3}{7}\ln 3.$

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\frac{\pi}{4k}\right)^{km})\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{3\pi}{10},\ c=-1,\ y(t)=t-1-\frac{\pi}{4}+$ $+\int\limits_\alpha^t x^2(s)\,ds.$

№15

1) X – множество прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$, не проходящих через точку (0,0). Если прямые l_1 и l_2 задать уравнениями $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0,\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0\ (p_1>0,\ p_2>0)$ соответственно, то $\rho(l_1,l_2)=|p_1-p_2|+|\sin\alpha_1-\sin\alpha_2|$.

2) $x_n(t)=e^{-n^2t^2};\ X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R}),\ \hat{X}=\mathbf{C}_b[1,+\infty),\ \widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\forall t: x(t)>0\}\subset\mathbf{C}[1,2].$

3) $[0,\ln 3],\ x(t)=8e^{-2t},\ y(t)=e^t,\ r=2$. 4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=\sin\frac{1}{kn})\wedge(k\in(0,+\infty))\}.$

5) $\alpha=-1,\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ c=\frac{3\pi}{4},\ y(t)=\frac{3\pi}{4}-\int\limits_{-1}^t\sin x^2(s)\,ds.$

№ 16

1) $X=\mathbb{R}^2,\ \rho(x,y)=\max\{|e^{x_1}-e^{y_1}|,|x_2-y_2|\}$, где $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$. 2) $x_n=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}};$ $X=(0,+\infty),\ \rho(x,y)=|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}|;\ \hat{X}=\mathbb{R},\ \hat{\rho}(x,y)=|x-y|;\ \widetilde{X}=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ \widetilde{\rho}(x,y)=|x-y|.$

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{2n+3}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1+\frac{(-1)^n}{4}\right\}_{n=1}^{\infty},\ r=\frac{7}{12}$. 4) $[\alpha,\beta]=[0,1],$

$A=\{x_k(t):(x_k(t)=\dfrac{kt+(kt)^k}{kt+1})\wedge(k\in[1,20])\}$. 5) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $c=\dfrac{3}{2}$, $y(t)=\dfrac{3}{2}+$

$+\int\limits_{\alpha}^{t}\sqrt{9-x^2(s)}\,ds.$

№ 17

1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\sqrt[3]{|x-y|}$. 2) $x_n(t)=\operatorname{arcctg}(nt)$; $X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R})$, $\hat{X}=\mathbf{C}_b[1,+\infty)$,

$\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\forall t:\ x(t)\neq\pi\}\subset\mathbf{C}_b(-\infty,-1]$. 3) $[0,2]$, $x(t)=t-\dfrac{1}{2}$, $y(t)=\dfrac{1}{t+1}$, $r=1$.

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:\ (x_n^{(k)}=\dfrac{(kn)^2}{3^{kn}})\ \wedge\ (k\in(0,+\infty))\}$. 5) $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{3}{2}$, $c=0$, $y(t)=\int\limits_{1}^{t}\sqrt{1+x^2(s)}\,ds$.

№ 18

1) $X=(-2,2]$, $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$. 2) $x_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$; $X=[0,1)$, $\rho(x,y)=\left|\log_2\dfrac{\arccos x}{\arccos y}\right|$;

$\hat{X}=[0,1]$, $\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\widetilde{X}=[0,1]\backslash\mathbb{Q}$, $\widetilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\sqrt[n]{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=1$. 4) $[\alpha,\beta]=[8,10]$, $A=\{x_k(t):(x_k(t)=\sqrt[3]{\dfrac{\sin kt}{kt}})\wedge(k\in[1,2])\}$.

5) $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $\beta=\dfrac{e}{2}$, $c=2$, $y(t)=2+3\int\limits_{\alpha}^{t}x^{\frac{2}{3}}(s)\,ds$.

№ 19

1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\operatorname{th}|x-y|$. 2) $x_n(t)=\sin(2\pi t^n)$, $X=\mathbf{C}[0,1]$, $\hat{X}=\mathbf{C}[0,\frac{1}{3}]$,

$\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\exists t:\ x(t)\neq 0\}\subset\mathbf{C}[0,\frac{1}{2}]$. 3) $[0,2]$, $x(t)=2t+t^2$, $y(t)=3\sqrt{t}$, $r=\dfrac{7}{3}$.

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:\ (x_n^{(k)}=\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{1}{(mk)^2})\ \wedge\ (k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{1}{3}$, $c=1$, $y(t)=1+$

$+\int\limits_{0}^{t}(2x(s)-x^2(s))\,ds.$

№ 20

1) $X=[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$, $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$. 2) $x_n=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{1}{m!}$; $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\operatorname{sgn}|x-y|$; $\hat{X}=\mathbb{R}$,

$\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\widetilde{X}=\mathbb{Q}$, $\widetilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{3\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\ln\dfrac{7}{4}+(-1)^n\ln 7\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=\ln\dfrac{61}{5}$. 4) $[\alpha,\beta]=[3,4]$, $A=\{x_k(t):(x_k(t)=\dfrac{e^{kt^2}+1}{e^{kt^2}-1})\wedge$

$\wedge(k\in[1,2])\}$. 5) $\alpha=\dfrac{5}{4}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $c=0$, $y(t)=-2\int\limits_{\beta}^{t}s\sqrt{9-x^2(s)}\,ds$.

№ 21

1) X – множество прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$, не проходящих через точку (0,0). Если прямые l_1 и l_2 задать уравнениями $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$, $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$ $(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha_i\le\dfrac{\pi}{2}$, $i=1,2)$ соответственно, то $\rho(l_1,l_2)=|p_1-p_2|+|\sin\alpha_1-\sin\alpha_2|$.

2) $x_n(t)=\operatorname{arctg}(nt)$; $X=\mathbf{C}_b[0,+\infty)$, $\hat{X}=\mathbf{C}_b[1,+\infty)$, $\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\forall t:x(t)>-\dfrac{\pi}{2}\}\subset\mathbf{C}_b(-\infty,-1]$.

3) $[0,2]$, $x(t)=4t-1$, $y(t)=3\sqrt{t}$, $r=e$. 4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:\ (x_n^{(k)}=\cos\dfrac{1}{kt})\ \wedge\ (k\in(0,+\infty))\}$.

5) $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{1}{3}$, $c=2$, $y(t)=2-t^2+2\int\limits_{0}^{t}sx(s)\,ds$.

№ 22

1) $X=(0,\pi]$, $\rho(x,y)=|\cos x-\cos y|$. 2) $x_n=n(\sqrt[n]{e}-1)$; $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\operatorname{sgn}|x-y|$; $\hat{X}=\mathbb{R}$,

$\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\widetilde{X}=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\widetilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{n}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=$

$=\left\{\dfrac{(-1)^n}{8}+\dfrac{1}{8}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=\dfrac{2}{7}$. 4) $[\alpha,\beta]=[1,2]$, $A=\{x_k(t):(x_k(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(kt)^3}})\wedge(k\in[0,1])\}$.

5) $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c=0$, $y(t)=2\int\limits_{0}^{t}s\sqrt{4-x^2(s)}\,ds$.

№ 23

1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\dfrac{2|x-y|}{3+4|x-y|}$. 2) $x_n(t)=\cos(2\pi t^n)$, $X=\mathbf{C}[0,1]$, $\hat{X}=\mathbf{C}[0,\frac{1}{4}]$,

$\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\exists t:\ x(t)\neq 1\}\subset\mathbf{C}[0,\frac{1}{2}]$. 3) $[0,\sqrt{3}]$, $x(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$, $y(t)=\sqrt{\dfrac{3}{4-t^2}}$, $r=1$.

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:\ (x_n^{(k)}=\dfrac{k^3n^3}{3k^4n^4+1})\ \wedge\ (k\in(0,+\infty))\}$. 5) $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{6}{5}$, $c=1$, $y(t)=1+$

$+\int\limits_{1}^{t}x^2(s)\,ds.$

№ 24

1) $X=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:(x_1>0)\wedge(x_2>0)\wedge(0<x_1+x_2\le\dfrac{\pi}{2})\}$,

$\rho(x,y)=\sqrt{(\cos x_1-\cos y_1)^2+(\cos x_2-\cos y_2)^2}$, где $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$.

2) $x_n(t)=\operatorname{arcctg}(t+n)$; $X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R})$, $\hat{X}=\mathbf{C}_b[0,+\infty)$, $\widetilde{X}=\{x=x(t)\,|\,\forall t:\ x(t)>0\}\subset\mathbf{C}[0,1]$.

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{3}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{14}{9}+\frac{1}{9}\cos\frac{2\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=\frac{\pi}{2}$. 4) $[\alpha,\beta]=[0,\frac{\pi}{9}]$,

$A=\{x_k(t):(x_k(t)=\operatorname{tg}\sqrt{kt})\wedge(k\in[\frac{1}{2},\pi])\}$. 5) $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=1$, $c=\frac{\pi}{4}$, $y(t)=\frac{\pi}{4}-2\int\limits_{1}^{t}s\sin^2 x(s)\,ds$.

№ 25

1) $X=(0,+\infty)$, $\rho(x,y)=|\ln\frac{x}{y}|$. 2) $x_n(t)=e^{-|t-n|}$; $X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R})$, $\hat{X}=\mathbf{C}_b(-\infty,0]$,

$\tilde{X}=\{x=x(t)|\ \forall t: x(t)>0\}\subset\mathbf{C}[0,1]$. 3) $[-\pi,0]$, $x(t)=\sin t$, $y(t)=\sin 2t$, $r=\frac{2\pi}{3}$.

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=\sum\limits_{m=1}^{n}e^{-km})\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\beta=\frac{7}{5}$, $c=0$, $y(t)=\frac{\pi}{2}-t^2-$

$-2\int\limits_{\alpha}^{t}s\,x^2(s)\,ds$.

№ 26

1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=1-e^{-|x-y|}$. 2) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$; $X=(0,+\infty)$, $\rho(x,y)=\left|\log_2\frac{\operatorname{arctg}x}{\operatorname{arctg}y}\right|$; $\hat{X}=[0,+\infty)$,

$\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\tilde{X}=[0,+\infty)\setminus\mathbb{Q}$, $\tilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\operatorname{arctg}\sqrt{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=1$. 4) $[\alpha,\beta]=[-\frac{\pi}{4},0]$, $A=\{x_k(t):(x_k(t)=\frac{\operatorname{tg}(kt)+1}{1-\operatorname{tg}(kt)})\wedge$

$\wedge(k\in[0,1])\}$. 5) $\alpha=-\frac{7}{6}$, $\beta=-1$, $c=0$, $y(t)=-3\ln|t|+3\int\limits_{-1}^{t}x(s)\frac{ds}{s}$.

№ 27

1) X – множество прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$, не проходящих через точку (0,0). Если прямые l_1 и l_2 задать уравнениями $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$, $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$ $(p_1>0,\ p_2>0)$ соответственно, то $\rho(l_1,l_2)=\max\{|p_1-p_2|,|\sin\alpha_1-\sin\alpha_2|,|\cos\alpha_1-\cos\alpha_2|\}$.

2) $x_n(t)=\operatorname{th}\frac{t}{n}$; $X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R})$, $\hat{X}=\mathbf{C}[-1,0]$, $\tilde{X}=\{x=x(t)|\ \forall t: x(t)\neq 0\}\subset\mathbf{C}[1,2]$.

3) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$, $x(t)=\operatorname{tg}t$, $y(t)=\operatorname{ctg}t$, $r=\ln\frac{\pi}{3}$. 4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=kn2^{-\sqrt{kn}})\wedge(k\in(0,+\infty))\}$.

5) $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{5\pi}{8}$, $c=0$, $y(t)=\frac{\pi}{2}-t-\int\limits_{\alpha}^{t}x^2(s)\,ds$.

№ 28

1) $X=\mathbb{R}^2$, $\rho(x,y)=\max\{\sqrt{|x_1-y_1|},|x_2-y_2|\}$, где $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$.

2) $x_n=n^3(n-\sqrt[4]{1+n^4})$; $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\operatorname{sgn}|x-y|$; $\hat{X}=\mathbb{R}$, $\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\tilde{X}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,

$\tilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{2-n^2}{2n^2-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{(-1)^n+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=\frac{7}{3}$.

4) $[\alpha,\beta]=[\pi,\frac{3\pi}{2}]$, $A=\{x_k(t):(x_k(t)=\sin^k\frac{kt}{t^2+k})\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=-1$, $\beta=-\frac{2}{3}$, $c=\frac{\pi}{4}$,

$y(t)=\frac{\pi}{4}+2\int\limits_{-1}^{t}s\cos x^2(s)\,ds$.

№ 29

1) $X=(0,\pi)$, $\rho(x,y)=\frac{\sin|x-y|}{\sin x\sin y}$. 2) $x_n(t)=e^{-\frac{|t|}{n}}$; $X=\mathbf{C}_b(\mathbb{R})$, $\hat{X}=\mathbf{C}[0,1]$,

$\tilde{X}=(\mathbf{C}[-1,1])\setminus\{x=x(t)|\ \forall t:\exists x'(t)\in\mathbb{R}\}$. 3) $[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$, $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=\frac{2}{1+t^2}$, $r=\frac{1}{4}$.

4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=\sqrt[k]{1+n^k}-n)\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{9}$, $c=1$, $y(t)=1+$

$+2\int\limits_{0}^{t}s\,x^2(s)\,ds$.

№ 30

1) $X=(-1,1)$, $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где $f(t)=\frac{t}{1-t^2}$. 2) $x_n=\sin\frac{\pi}{3^n}$; $X=(0,1]$,

$\rho(x,y)=\left|\log_3\frac{\arcsin x}{\arcsin y}\right|$; $\hat{X}=[0,1]$, $\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\tilde{X}=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $\tilde{\rho}(x,y)=|x-y|$.

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\operatorname{arctg}\sqrt{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{\pi(2n-1)}{4}+\frac{5\pi}{16}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=\frac{3}{4}$. 4) $[\alpha,\beta]=[2,3]$,

$A=\{x_k(t):(x_k(t)=\frac{t^k}{\ln^k t})\wedge(k\in[0,+\infty))\}$. 5) $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\beta=0$, $c=-1$, $y(t)=-1+\int\limits_{0}^{t}x^2(s)\,ds$.

№ 31

1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}\sqrt{|x-y|}$. 2) $x_n=\sqrt{1+n^2}-n$; $X=(0,+\infty)$, $\rho(x,y)=|\varphi(x)-\varphi(y)|$, где

$\varphi(t)=\frac{1}{t}-t$; $\hat{X}=[0,+\infty)$, $\hat{\rho}(x,y)=|x-y|$; $\tilde{X}=[0,+\infty)\setminus\mathbb{Q}$, $\tilde{\rho}(x,y)=|x-y|$. 3) $[0,\sqrt{3}]$,

$x(t)=\operatorname{arcctg}t$, $y(t)=\operatorname{arctg}t$, $r=\frac{\pi}{4}$. 4) $A=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}:(x_n^{(k)}=kn\sin\frac{1}{kn})\wedge(k\in(0,+\infty))\}$.

5) $\alpha=2$, $\beta=\frac{101}{50}$, $c=1$, $y(t)=1+3\int\limits_{2}^{t}s^2x^2(s)\,ds$.

№ 32

1) $X=(-1,1)$, $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где $f(t)=\ln\frac{1+t}{1-t}$. 2) $x_n(t)=\begin{cases}nt^n\ln t, & t>0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$

$X=\mathbf{C}[0,1]$; $\hat{X}=\mathbf{C}[0,\frac{1}{4}]$, $\hat{\rho}(x,y)=\int\limits_{0}^{1}|x(t)-y(t)|\,dt$; $\tilde{X}=\{x=x(t)|\ \exists t: x(t)<0\}\subset\mathbf{C}[0,\frac{1}{2}]$.

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{5}{2\sqrt{3}}\cos\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r=\frac{5}{3}$. 4) $[\alpha,\beta]=[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$,

$A=\{x_k(t):(x_k(t)=t^k\mathrm{ctg}^k t)\wedge(k\in\mathbb{N})\}$. 5) $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=0$, $c=0$, $y(t)=t+\int\limits_0^t x^2(s)\,ds$.

Навчальне видання

Луценко Ігор Єфремович, Рижий Володимир Семенович, Бойко Сергій Сергійович

МЕТРИЧНІ ТА НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Підп. до друку Формат 60×84 1/16. Папір офсетн. Друк різографічний. Умовн. друк. арк. 6,7. Облік.-вид. арк. 7,8. Тираж 200 прим.
Ціна договірна.

61077, Харків, пл. Свободи, 4,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Видавничий центр

Віддруковано ПП "Азамаєв В.Р."
61144, Харків, вул. Героїв праці, 17